§ 14. Составление нормальных уравнений

Условные уравнения (12.6) в их окончательной форме, т. е. после умножения на корень квадратный из веса и приведения к численной однородности, приняли вид (13.2). Задача приводится, таким образом, к нахождению неизвестных x_i из уравнений вида

$$d_{i1}x_1+d_{i2}x_2+\ldots+d_{im}x_m=l_i \tag{14.1}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n>m).$$

Поскольку в этой системе число уравнения превышает число неизвестных, ей нельзя удовлетворить (по крайней мере в общем случае) с полной точностью. Может идти речь только о нахождении таких значений неизвестных x_k, которые удовлетворяют уравнениям (14.1) лишь приближенно; иначе говоря, дают

$$d_{i1}x_1+d_{i2}x_2+\ldots+d_{im}x_m=l_i+v_i, \tag{14.2}$$

где через $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ обозначены остающиеся невязки.

Соотношения (14.2) можно рассматривать как систему уравнений, которым должны совершенно точно удовлетворять $n+m$ неизвестных x_k и v_i. Такая система имеет в общем случае ∞^m решений. Но решение уравнений (14.2) становится, как сейчас увидим, вполне однозначным, если подчинить его дополнительному условию, носящему название *принципа наименьших квадратов*.

В соответствии с этим принципом будем искать решение, для которого величина

$$\Phi=\sum_i^n v_i^2 \tag{14.3}$$

имеет наименьшее значение.

Рассматривая Φ как функцию $x_1,\ \ldots,\ x_m$, определяемую равенством (14.2) и (14.3), мы видим, что искомое решение должно удовлетворять условиям

$$\sum_1^n v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_h}=\sum_1^n d_{ih}v_i=0 \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{14.4}$$

Подставив сюда значения v_i, даваемые равенствами (14.2), получим для x_k следующие уравнения:

$$a_{h1}x_1+a_{h2}x_2+\ldots+a_{hm}x_m=a_{h0} \quad (h=1,\ \ldots,\ m), \tag{14.5}$$

где

$$a_{hk}=\sum_1^n d_{ih}d_{ik};\qquad a_{h0}=\sum_i^n d_{ih}l_i. \tag{14.6}$$

Равенства (14.6) показывают, что

$$a_{hh}=\sum_{1}^{n} d_{ih}^{2}; \quad a_{hk}=a_{kh}. \tag{14.7}$$

Таким образом, среди m^2 коэффициентов уравнений (14.5) имеется только $\frac{1}{2}m(m+1)$ различных, причем все диагональные коэффициенты a_{hh} положительны.

Во всех случаях, представляющих практический интерес, ранг матрицы $\|d_{ik}\|$, составленной из коэффициентов условных уравнений (14.1), равен m. Вследствие этого квадратичная форма, соответствующая симметричной матрице $\|a_{hk}\|$, будет положительно определенной, поскольку эту форму можно представить как сумму квадратов левых частей условных уравнений (14.1), а ранг этой системы равен числу неизвестных. Отсюда следует, как известно из теории матриц, что все главные миноры определителя $|a_{hk}|$ положительны. В частности,

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{k1}, & \ldots, & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k=1,2,\ \ldots,\ m).$$

Матрица $\|a_{hk}\|$, обладающая этим свойством, называется положительно определенной.

Систему уравнений вида (14.5), коэффициенты которой образуют симметричную, положительно определенную матрицу, будем называть нормальной системой.

После того как решение нормальных уравнений (14.5) даст $x_1, \ldots, x_m$, соотношения (14.2) позволят вычислить величины $v_1, \ldots, v_n$, носящие название невязок условных уравнений.

Составление нормальных уравнений, выполняемое при помощи формул (14.6), обязательно должно быть проконтролировано.

Для этого составляют суммы

$$s_i=\sum_{1}^{m} d_{ik} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

коэффициентов каждого из уравнений (14.1) и вычисляют величины

$$a_{sh}=\sum_{1}^{n} d_{ih}s_i; \quad a_{s0}=\sum_{1}^{n} l_i s_i,$$

аналогичные (14.6). Тогда

$$a_{sh}=\sum_{1}^{m} a_{hk}; \quad a_{s0}=\sum_{1}^{m} a_{k0}.$$

Иначе говоря, почленное сложение уравнений (14.5) должно дать уравнение

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sm}x_m = a_{s0}. \tag{14.8}$$

Это уравнение называется **суммовым уравнением**.

§ 15. Решение нормальных уравнений. Метод исключения

Для решения нормальных уравнений можно, конечно, использовать любые методы решения систем линейных уравнений, как прямые, дающие неизвестные сразу с требуемой точностью, так и различные методы последовательных приближений *).

Но в условиях, имеющих место в задачах теоретической астрономии, когда число неизвестных невелико ($m=6$ или лишь не намного больше), а кроме неизвестных, должны быть вычислены и их средние ошибки, наиболее удобными оказываются методы, излагаемые в этом и следующем параграфах.

Когда в начале XIX в. метод наименьших квадратов был введен в астрономическую практику, нормальные уравнения стали решать способом последовательного исключения неизвестных — самым простым в теоретическом отношении. Этот метод был подробно изложен Гауссом с учетом особенностей нормальных систем, вследствие чего его нередко называют **методом** (или **алгоритмом**) **Гаусса**. Он заключается в следующем.

Напишем систему (14.5) в развернутом виде:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = a_{20}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m = a_{m0}. \end{array}\right\} \tag{15.1}$$

Чтобы исключить x_1, первое из этих уравнений представим в форме

$$x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1m}x_m = c_{10}, \tag{15.2}$$

где

$$c_{1k} = a_{1k}/a_{11} \quad (k = 0, 2, \ldots, m).$$

Умножим (15.2) на первые коэффициенты $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$ остальных уравнений (15.1) и вычтем из этих уравнений. Полагая

$$(ik\,.\,1) = a_{ik} - a_{i1}c_{1k} \tag{15.3}$$

$$(i = 2, 3, \ldots, m;\ k = 0, 2, \ldots, m),$$

*) Из авторов, которые особенно подробно рассматривают решение систем линейных уравнений (как общего вида, так и нормальных), укажем В. Н. Фаддееву [1950], Двайера [1951], Е. Г. Ларченко [1956] и Кунца [1957].