Иначе говоря, почленное сложение уравнений (14.5) должно дать уравнение

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sm}x_m = a_{s0}. \tag{14.8}$$

Это уравнение называется *суммовым уравнением*.

§ 15. Решение нормальных уравнений. Метод исключения

Для решения нормальных уравнений можно, конечно, использовать любые методы решения систем линейных уравнений, как прямые, дающие неизвестные сразу с требуемой точностью, так и различные методы последовательных приближений *).

Но в условиях, имеющих место в задачах теоретической астрономии, когда число неизвестных невелико ($m=6$ или лишь не намного больше), а кроме неизвестных, должны быть вычислены и их средние ошибки, наиболее удобными оказываются методы, излагаемые в этом и следующем параграфах.

Когда в начале XIX в. метод наименьших квадратов был введен в астрономическую практику, нормальные уравнения стали решать способом последовательного исключения неизвестных — самым простым в теоретическом отношении. Этот метод был подробно изложен Гауссом с учетом особенностей нормальных систем, вследствие чего его нередко называют *методом* (или *алгоритмом*) *Гаусса*. Он заключается в следующем.

Напишем систему (14.5) в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= a_{10}, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= a_{20}, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m &= a_{m0}. \end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

Чтобы исключить x_1, первое из этих уравнений представим в форме

$$x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1m}x_m = c_{10}, \tag{15.2}$$

где

$$c_{1k} = a_{1k}/a_{11} \quad (k = 0, 2, \ldots, m).$$

Умножим (15.2) на первые коэффициенты $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$ остальных уравнений (15.1) и вычтем из этих уравнений. Полагая

$$(ik\,.\,1) = a_{ik} - a_{i1}c_{1k} \tag{15.3}$$

$$(i = 2, 3, \ldots, m;\ k = 0, 2, \ldots, m),$$

*) Из авторов, которые особенно подробно рассматривают решение систем линейных уравнений (как общего вида, так и нормальных), укажем В. Н. Фаддееву [1950], Двайера [1951], Е. Г. Ларченко [1956] и Кунца [1957].

получим

$$\left.\begin{array}{r} (22.1)\,x_2 + (23.1)\,x_3 + \ldots + (2m.1)\,x_m = (20.1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m2.1)\,x_2 + (m3.1)\,x_3 + \ldots + (mm.1)\,x_m = (m0.1). \end{array}\right\} \quad (15.4)$$

К этой системе применяем тот же прием. Вычислив величины

$$c_{2k} = (2k.1)/(22.1); \ (k = 0,\ 3,\ \ldots,\ m) \qquad (15.5)$$

и положив

$$(ik.2) = (ik.1) + (i2.1)\,c_{2k} \qquad (15.6)$$

$$(i = 3,\ 4,\ \ldots,\ m;\ k = 0,\ 3,\ \ldots,\ m),$$

вместо системы (15.4) будем иметь уравнение

$$x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2m}x_m = c_{20}$$

и систему

$$\left.\begin{array}{r} (33.2)\,x_3 + \ldots + (3m.2)\,x_m = (30.2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m3.2)\,x_3 + \ldots + (mm.2)\,x_m = (m0.2). \end{array}\right\} \quad (15.7)$$

Продолжая этот процесс, мы получим в конце концов вместо системы (15.1) систему с треугольной матрицей

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1m}x_m = c_{10}, \\ x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2m}x_m = c_{20}, \\ x_3 + \ldots + c_{3m}x_m = c_{30}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = c_{m0}, \end{array}\right\} \quad (15.8)$$

легко разрешимую относительно x_m, x_{m-1}, ..., x_2, x_1.

Так как $a_{ik} = a_{ki}$, то, как легко убедиться,

$$(ik\,.\,h) = (ki\,.\,h). \qquad (15.9)$$

Поэтому в каждой из систем (15.4), (15.7), ... коэффициенты образуют симметричную матрицу. Таким образом, приходится вычислять лишь немногим более половины этих коэффициентов. Можно доказать, что

$$(kk\,.\,h) > 0,$$

вследствие чего указанный процесс исключения неизвестных всегда выполним.

Чтобы иметь систематический контроль всех этапов работы, к уравнениям (15.1) присоединяют их суммовое уравнение (14.8), получаемое путем почленного сложения уравнений (15.1). Это уравнение имеет вид

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sm}x_m = a_{s0}, \qquad (15.10)$$

где s является уже не числом, а символом суммы.

Подвергнув суммовое уравнение тем же операциям, что и каждое из уравнений (15.1), получим уравнения

$$\left.\begin{aligned}(s2.1)\,x_2+(s3.1)\,x_3+\ \dots\ +(sm.1)\,x_m&=(s0.1),\\ (s3.2)\,x_3+\ \dots\ +(sm.2)\,x_m&=(s0.2),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ (sm.m-1)\,x_m&=(s0.m-1),\end{aligned}\right\}\qquad(15.11)$$

коэффициенты которых вычисляются по формулам (15.3), (15.6), ..., после замены в них i через s.

Первое из уравнений (15.11) есть сумма уравнений (15.4), второе — сумма уравнений (15.7) и т. д. Таким образом, сопровождая исключение каждой неизвестной получением соответствующего суммового уравнения (15.11), мы будем иметь контроль каждого этапа вычислений.

Окончательным контролем может служить подстановка x_1, x_2, ..., x_m в уравнения (15.1). Эту подстановку надо выполнять в обратном порядке: сначала в m-е уравнение, потом в $(m-1)$-е и т. д.

Изложенный метод отличается наибольшей простотой применяемых в нем формул. Другим преимуществом этого метода по сравнению с излагаемыми дальше является возможность изменения порядка исключения неизвестных во время процесса вычисления. Это позволяет без всякого усложнения работы пользоваться на каждом этапе наибольшим возможным делителем.

Недостатком метода исключения в его простейшей, только что указанной форме является требуемое им некоторое количество излишней работы. Этот недостаток тем чувствительнее, чем больше число неизвестных. Поэтому в геодезических вычислениях, где число неизвестных бывает весьма значительно, давно уже стали применяться различные сокращенные схемы. Наилучшей из них, с точки зрения экономии и удобства, была схема, предложенная в 1878 г. американским геодезистом Дулиттлом (M. H. Doolittle). Но в астрономических вычислениях (где число неизвестных равно шести или лишь не намного больше) до недавнего времени продолжали применять изложенную выше полную схему метода исключения.

§ 16. Компактная форма метода исключения

Одним из существеннейших преимуществ вычисления на арифмометрах и клавишных машинах является возможность находить выражения вида

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ \dots\ +a_jb_j)/c$$

сразу, при помощи так называемой «операции накопления». Это обстоятельство не только сокращает работу (так как позволяет