Подвергнув суммовое уравнение тем же операциям, что и каждое из уравнений (15.1), получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} (s2.1)\,x_2+(s3.1)\,x_3+\ \ldots\ +(sm.1)\,x_m&=(s0.1),\\ (s3.2)\,x_3+\ \ldots\ +(sm.2)\,x_m&=(s0.2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ (sm.m-1)\,x_m&=(s0.m-1), \end{aligned}\right\}\quad(15.11)$$

коэффициенты которых вычисляются по формулам (15.3), (15.6), ..., после замены в них i через s.

Первое из уравнений (15.11) есть сумма уравнений (15.4), второе — сумма уравнений (15.7) и т. д. Таким образом, сопровождая исключение каждой неизвестной получением соответствующего суммового уравнения (15.11), мы будем иметь контроль каждого этапа вычислений.

Окончательным контролем может служить подстановка x_1, x_2, ..., x_m в уравнения (15.1). Эту подстановку надо выполнять в обратном порядке: сначала в m-е уравнение, потом в $(m-1)$-е и т. д.

Изложенный метод отличается наибольшей простотой применяемых в нем формул. Другим преимуществом этого метода по сравнению с излагаемыми дальше является возможность изменения порядка исключения неизвестных во время процесса вычисления. Это позволяет без всякого усложнения работы пользоваться на каждом этапе наибольшим возможным делителем.

Недостатком метода исключения в его простейшей, только что указанной форме является требуемое им некоторое количество излишней работы. Этот недостаток тем чувствительнее, чем больше число неизвестных. Поэтому в геодезических вычислениях, где число неизвестных бывает весьма значительно, давно уже стали применяться различные сокращенные схемы. Наилучшей из них, с точки зрения экономии и удобства, была схема, предложенная в 1878 г. американским геодезистом Дулиттлом (M. H. Doolittle). Но в астрономических вычислениях (где число неизвестных равно шести или лишь не намного больше) до недавнего времени продолжали применять изложенную выше полную схему метода исключения.

§ 16. Компактная форма метода исключения

Одним из существеннейших преимуществ вычисления на арифмометрах и клавишных машинах является возможность находить выражения вида

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ \ldots\ +a_jb_j)/c$$

сразу, при помощи так называемой «операции накопления». Это обстоятельство не только сокращает работу (так как позволяет не записывать промежуточные величины), но и уменьшает влияние ошибок округления на конечный результат.

Излагаемую здесь модификацию метода исключения, получившуюся в результате стремления использовать преимущества, даваемые операцией накопления, будем называть **компактной формой метода исключения***).

Метод исключения заключается в переходе от заданной системы (15.1) к системе (15.8). Промежуточные же системы (15.4), (15.7), ... сами по себе нам не нужны. Вот это обстоятельство и позволяет сделать вычисления более компактными.

Рассматриваемую нормальную систему возьмем опять в форме

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = a_{10}, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = a_{20}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = a_{m0}, \end{array}\right\} \qquad (16.1)$$

но для величин, получаемых в процессе исключения, будем пользоваться следующими сокращенными обозначениями:

$$b_{1k} = a_{1k} = a_{k1}; \qquad b_{ik} = (ik\,.\,i-1) = (ki\,.\,i-1).$$

Тогда формулы (15.2), (15.5), ... можно будет объединить в одну

$$c_{ik} = b_{ik}/b_{ii}. \qquad (16.2)$$

С другой стороны, соотношения (15.3), (15.6), ... примут вид

$$\begin{aligned} (ik.1) &= a_{ik} - b_{1i}c_{1k}, \\ (ik.2) &= (ik.1) - b_{2i}c_{2k}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ (ik.h) &= (ik.h-1) - b_{hi}c_{hk}. \end{aligned}$$

Почленное сложение этих равенств дает

$$(ik.h) = a_{ik} - b_{1i}c_{1k} - b_{2i}c_{2k} - \ldots - b_{hi}c_{hk}.$$

Отсюда, полагая $h = i - 1$, находим

$$b_{ik} = a_{ik} - b_{1i}c_{1k} - b_{2i}c_{2k} - \ldots - b_{i-1,\,i}c_{i-1,\,k}. \qquad (16.3)$$

Формулы (16.2) и (16.3) позволяют найти все величины b_{ik} и c_{ik}. Присоединив к нормальным уравнениям (16.1) их суммовое

*) К этому методу пришли различными путями, вследствие чего он известен под несколькими названиями: модернизированный метод Гаусса, метод матриц, метод компактной схемы, метод Крута.

Относящиеся сюда работы указаны в монографии Андерсена [1955], в статье С. Г. Маковера [1956], а также в уже упомянутых (стр. 326) книгах.

уравнение (15.10), мы и здесь будем иметь постоянный контроль.

Укажем со всеми подробностями выполняемые операции.

Первый этап:

$$b_{1k}=a_{1k};\quad c_{1k}=b_{1k}b_{11}^{-1}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ 0;\ s). \tag{16.4}$$

Контроль:

$$c_{1s}=\sum_{1}^{m} c_{1k}.$$

Второй этап:

$$b_{2k}=a_{2k}-b_{1k}c_{12};\quad c_{2k}=b_{2k}b_{22}^{-1}\qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ m,\ 0;\ s). \tag{16.5}$$

Контроль:

$$c_{2s}=\sum_{2}^{m} c_{2k}.$$

Третий этап:

$$b_{3k}=a_{3k}-b_{1k}c_{13}-b_{2k}c_{23};\quad c_{3k}=b_{3k}b_{33}^{-1} \tag{16.6}$$

$$(k=3,\ 4,\ \ldots,\ m,\ 0;\ s).$$

Контроль:

$$c_{3s}=\sum_{3}^{m} c_{3k}.$$

Продолжая таким образом, мы найдем коэффициенты уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+\ \ldots\ +c_{1m}x_m&=c_{10},\\ x_2+c_{23}x_3+\ \ldots\ +c_{2m}x_m&=c_{20},\\ x_3+\ \ldots\ +c_{3m}x_m&=c_{30},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ x_m&=c_{m0}, \end{aligned}\right\} \tag{16.7}$$

служащих для последовательного вычисления неизвестных $x_{m-1},\ \ldots,\ x_2,\ x_1$. Каждая из этих величин получается при помощи одной операции накопления.

Одно из возможных расположений вычислений указано (для случая $m=4$) в столбцах (1), (2), (3), (4), (0) прилагаемой схемы. В столбце (S) помещены величины c_{1s}, c_{2s}, ..., служащие для контроля соответствующих строк. Последняя строка столбцов (1), (2), (3), (4) содержит значения неизвестных, полученные по формулам (16.7).

Величины b_{ik} лучше писать на отдельном листе, как указано в схеме. Перегибая этот лист по вертикальным линиям и прикладывая его столбцы к соответствующим столбцам основного листа, будем иметь наиболее удобное расположение тех чисел, которые приходится перемножать в формулах (16.5), (16.6), ...

Схема решения нормальных уравнений и вычисления обратной матрицы (компактная форма метода исключения)

(1)	(2)	(3)	(4)	(0)	(I)	(II)	(III)	(IV)	(S)	(Σ)
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{10}	1	0	0	0	a_{1s}	$a_{1\Sigma}$
.	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{20}	0	1	0	0	a_{2s}	$a_{2\Sigma}$
.	.	a_{33}	a_{34}	a_{30}	0	0	1	0	a_{3s}	$a_{3\Sigma}$
.	.	.	a_{44}	a_{40}	0	0	0	1	a_{4s}	$a_{4\Sigma}$
1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{10}	$c_{1\mathrm{I}}$	0	0	0	c_{1s}	$c_{1\Sigma}$
0	1	c_{23}	c_{24}	c_{20}	$c_{2\mathrm{I}}$	$c_{2\mathrm{II}}$	0	0	c_{2s}	$c_{2\Sigma}$
0	0	1	c_{34}	c_{30}	$c_{3\mathrm{I}}$	$c_{3\mathrm{II}}$	$c_{3\mathrm{III}}$	0	c_{3s}	$c_{3\Sigma}$
0	0	0	1	c_{40}	$c_{4\mathrm{I}}$	$c_{4\mathrm{II}}$	$c_{4\mathrm{III}}$	$c_{4\mathrm{IV}}$	c_{4s}	$c_{4\Sigma}$
x_1	x_2	x_3	x_4							

q_{11}	0	0	0
q_{21}	q_{22}	0	0
q_{31}	q_{32}	q_{33}	0
q_{41}	q_{42}	q_{43}	q_{44}
x_1	x_2	x_3	x_4

(1)	(2)	(3)	(4)
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
0	b_{22}	b_{23}	b_{24}
0	0	b_{33}	b_{34}
0	0	0	b_{44}
b_{11}^{-1}	b_{22}^{-1}	b_{33}^{-1}	b_{44}^{-1}

Вычисление обратной матрицы

Пусть

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{Vmatrix}$$

есть матрица коэффициентов рассматриваемой нами системы (16.1).

Так как определитель A не равен нулю, то существует обратная матрица

$$Q=\begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mm} \end{Vmatrix}, \qquad (16.8)$$

удовлетворяющая условию

$$AQ=QA=E, \qquad (16.9)$$

где через E обозначена единичная матрица:

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Равенство (16.9) эквивалентно m системам уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}q_{1i}+a_{12}q_{2i}+\dots+a_{1m}q_{mi}=\delta_{1i}, \\ a_{21}q_{1i}+a_{22}q_{2i}+\dots+a_{2m}q_{mi}=\delta_{2i}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}q_{1i}+a_{m2}q_{2i}+\dots+a_{mm}q_{mi}=\delta_{mi} \end{array}\right\} \qquad (16.10)$$

$$(i=1,\ 2,\ \dots,\ m),$$

где $\delta_{ki}=1$, если $k=i$; $\delta_{ki}=0$, если $k\neq i$.

Каждая из систем (16.10) отличается от рассматриваемой системы нормальных уравнений (16.1) только свободными членами. Это обстоятельство очень упрощает решение систем (16.10). Это решение показано в столбцах (I), ..., (IV) нашей схемы для случая, когда $m=4$.

В первых четырех строках этих столбцов выписаны свободные члены δ_{ki}. Выполнение над ними операций (16.4), (16.5), (16.6), ... позволяет заполнить следующие четыре строки. После этого уравнения (16.7), в которых правые части c_{10}, c_{20}, ... заменяются соответственно на c_{1I}, c_{2I}, ..., потом на c_{1II}, c_{2II}, ... и т. д., дадут элементы Q.

Так как матрица Q, очевидно, тоже симметрична, то ее элементы, лежащие выше главной диагонали, можно не вычислять.

Столбец (Σ) служит для контроля. В его первых четырех строках находятся суммы всех свободных членов, так что

$$a_{i\Sigma} = a_{i0} + 1.$$

Выполнение над $a_{i\Sigma}$ таких же операций, как над a_{i0}, дает следующие элементы этого столбца. Контролем служит выполнение равенств

$$\begin{array}{l} c_{10} + c_{1I} + 0 \quad + 0 \quad + 0 \quad = c_{1\Sigma}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{40} + c_{4I} + c_{4II} + c_{4III} + c_{4IV} = c_{4\Sigma}. \end{array}$$

Систему (16.1) можно написать так:

$$A\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = \{a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{m0}\}, \qquad (16.11)$$

где символом $\{\ldots\}$ обозначена матрица, состоящая из одного столбца (вектор).

Умножив обе части этого равенства на $Q = A^{-1}$, получим

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = Q\{a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{m0}\}.$$

Вычисленные таким образом значения неизвестных помещены в схеме (стр. 331) под матрицей Q. Совпадение их со значениями, найденными по формулам (16.7), дает очень полезный контроль всей проделанной работы.

Примечание. Если положить

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1m} & b_{2m} & \ldots & b_{mm} \end{Vmatrix} \qquad C = \begin{Vmatrix} 1 & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ 0 & 1 & \ldots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & c_{mm} \end{Vmatrix},$$

то вследствие соотношения (16.3) будем иметь

$$A = BC. \qquad (16.12)$$

Таким образом, умножив соотношение (16.11) на B^{-1} и положив

$$B^{-1}\{a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{m0}\} = \{c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{m0}\},$$

будем иметь

$$C\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = \{c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{m0}\},$$

т. е. получим систему (16.7).

Это показывает, что метод исключения эквивалентен разложению матрицы рассматриваемой системы на произведение двух треугольных матриц указанного вида. Заметим, что на дополнительном листе схемы помещена не матрица B, а транспонированная ей.