§ 17. Метод Банахевича

Решение системы нормальных уравнений можно сделать еще более компактным в отношении записи. Для этого нужно, как было указано Т. Банахевичем в 1938 г., разложить матрицу A этой системы на произведение двух взаимно транспонированных треугольных матриц.

Покажем, что всегда можно найти матрицу

$$R=\begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & \ldots & r_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & r_{mm} \end{Vmatrix}, \tag{17.1}$$

удовлетворяющую условию $R'R=A$, где через

$$R'=\begin{Vmatrix} r_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ r_{12} & r_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{1m} & r_{2m} & \ldots & r_{mm} \end{Vmatrix}$$

обозначена транспонированная матрица.

Правило умножения показывает, что элементы искомой матрицы (17.1) определяются условиями:

$$a_{ik}=r_{1i}r_{1k}+r_{2i}r_{2k}+\ \ldots\ +r_{ii}r_{ik} \quad (i\leqslant k). \tag{17.2}$$

Легко видеть, что соотношения (17.2) позволяют найти все величины r_{ik}. В самом деле, полагая $i=1$, будем иметь

$$r_{11}=\sqrt{a_{11}};\quad r_{1k}=r_{11}^{-1}a_{1k} \tag{17.3}$$

после чего, полагая в формулах

$$\left.\begin{aligned} &r_{ii}=\sqrt{a_{ii}-(r_{1i}^2+r_{2i}^2+\ \ldots\ +r_{i-1,\,i}^2)}, \\ &r_{ik}=r_{ii}^{-1}(a_{ik}-r_{1i}r_{1k}-r_{2i}r_{2k}-\ \ldots\ -r_{i-1,\,i}r_{i-1,\,k});\ i<k \end{aligned}\right\} \tag{17.4}$$

последовательно $i=2,\ 3,\ \ldots,\ m$, найдем все остальные r_{ik}.

Чтобы иметь контроль производимых операций, составляем суммы

$$a_{is}=a_{i1}+a_{i2}+\ \ldots\ +a_{im}$$

строк матрицы A и вычисляем по формуле (17.4) соответствующие r_{is}. Тогда, как легко видеть,

$$r_{is}=r_{ii}+r_{i,\,i+1}+\ \ldots\ +r_{i,\,m}.$$

Найдя матрицу R, мы можем нормальную систему (16.10) написать так:

$$R'R\{x_1,\,x_2,\ \ldots,\ x_m\}=\{a_{10},\,a_{20},\ \ldots,\ a_{m0}\}.$$

Умножим обе части этого равенства на R'^{-1}. Положив

$$R'^{-1}\{a_{10}, \ldots, a_{m0}\}=\{r_{10}, \ldots, r_{m0}\},$$

окончательно получим систему

$$R\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}=\{r_{10}, r_{20}, \ldots, r_{m0}\},$$

дающую $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$.

Для нахождения обратной матрицы поступаем так же, как было указано в предыдущем параграфе, т. е. повторно решаем рассматриваемую систему, заменив свободные члены a_{k0} через $a_{k\mathrm{I}}=\delta_{k1}$, потом через $a_{k\mathrm{II}}=\delta_{k2}$ и т. д.

Расположение вычислений показано в прилагаемой схеме для случая $m=4$. Контроль осуществляется при заполнении каждой строки при помощи сумм, помещенных в столбцах (S) и (Σ). По окончании вычисления обратной матрицы находятся контрольные значения неизвестных, помещенные в схеме под обратной матрицей.

Схема решения нормальных уравнений и вычисления обратной матрицы (метод Банахевича)

(1)	(2)	(3)	(4)	(0)	(I)	(II)	(III)	(IV)	(S)	(Σ)
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{10}	1	0	0	0	a_{1s}	$a_{1\Sigma}$
.	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{20}	0	1	0	0	a_{2s}	$a_{2\Sigma}$
.	.	a_{33}	a_{34}	a_{30}	0	0	1	0	a_{3s}	$a_{3\Sigma}$
.	.	.	a_{44}	a_{40}	0	0	0	1	a_{4s}	$a_{4\Sigma}$
r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{10}	$r_{1\,\mathrm{I}}$	$r_{1\,\mathrm{II}}$	$r_{1\,\mathrm{III}}$	$r_{1\,\mathrm{IV}}$	r_{1s}	$r_{1\Sigma}$
0	r_{22}	r_{23}	r_{24}	r_{20}	$r_{2\,\mathrm{I}}$	$r_{2\,\mathrm{II}}$	$r_{2\,\mathrm{III}}$	$r_{2\,\mathrm{IV}}$	r_{2s}	$r_{2\Sigma}$
0	0	r_{33}	r_{34}	r_{30}	$r_{3\,\mathrm{I}}$	$r_{3\,\mathrm{II}}$	$r_{3\,\mathrm{III}}$	$r_{3\,\mathrm{IV}}$	r_{3s}	$r_{3\Sigma}$
0	0	0	r_{44}	r_{40}	$r_{4\,\mathrm{I}}$	$r_{4\,\mathrm{II}}$	$r_{4\,\mathrm{III}}$	$r_{4\,\mathrm{IV}}$	r_{4s}	$r_{4\Sigma}$
r_{11}^{-1}	r_{22}^{-1}	r_{33}^{-1}	r_{44}^{-1}		q_{11}	.	.	.		
x_1	x_2	x_3	x_4		q_{21}	q_{22}	.	.		
					q_{31}	q_{32}	q_{33}	.		
					q_{41}	q_{42}	q_{43}	q_{44}		
					x_1	x_2	x_3	x_4		