§ 18. Средние ошибки неизвестных. Заключительный контроль

Подстановка найденных значений неизвестных в условные уравнения (14.1) дает остающиеся невязки

$$v_i = d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \ldots + d_{im}x_m - l_i, \tag{18.1}$$

служащие для вычисления средней ошибки единицы веса по хорошо известной формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{(vv)}{n-m}}, \tag{18.2}$$

где

$$(vv) = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2. \tag{18.3}$$

Средняя ошибка неизвестной x_k вычисляется по формуле

$$\mu_k = \mu\sqrt{q_{k,k}}, \tag{18.4}$$

где $q_{k,k}$ — соответствующий диагональный элемент обратной матрицы (16.8).

В астрономических работах обычно довольствуются той оценкой точности результатов, которая дается средними ошибками (18.4). Эта оценка тем надежнее, чем больше разность $n-m$.

Полезно напомнить, что границы, в которых заключается квадрат средней ошибки (18.2), даются приближенным выражением

$$\mu^2\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-m}}\right),$$

которое тем точнее, чем больше $n-m$ и чем ближе закон распределения ошибок к нормальному.

Вопрос о вероятностной оценке точности результатов, получаемых по методу наименьших квадратов, с наибольшей полнотой и строгостью рассмотрен в книге Ю. В. Линника [1958].

Вычисление суммы квадратов невязок, входящей в формулу (18.2), выполняется всегда двумя различными способами, что дает очень хороший заключительный контроль всей проделанной работы.

Первый способ состоит в применении формул (18.1) и (18.3). Для вывода формулы, служащей для второго способа, помножим равенство (18.1) на v_i и просуммируем. Это даст

$$(vv) = -\sum_1^n l_i v_i + \sum_1^n (x_1 d_{i1} v_i + \ldots + x_m d_{im} v_i).$$

Так как вторая сумма справа равна нулю на основании равенств (14.4), то

$$(vv) = -\sum_1^n l_i v_i.$$

С другой стороны, умножив величины (18.1) на l_i и просуммировав, получим

$$\sum_1^n l_i v_i = -(ll) + \sum_1^n (x_1 d_{i1} l_i + \ldots + x_m d_{im} l_i),$$

где

$$(ll) = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2.$$

Таким образом, пользуясь обозначениями (14.6), получаем следующую контрольную формулу:

$$(vv) = (ll) - (a_{10} x_1 + \ldots + a_{m0} x_m). \tag{18.5}$$

Коэффициентами при неизвестных здесь служат свободные члены нормальных уравнений, вследствие чего это равенство, будучи написано в форме

$$a_{10} x_1 + a_{20} x_2 + \ldots + a_{m0} x_m = (ll) - (vv),$$

как бы завершает с точки зрения симметрии систему нормальных уравнений.

Формула (18.5) может быть представлена в другом виде. Если равенства (16.7) помножить по порядку на $b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{m0}$ и почленно сложить, то слева получится (в силу соотношения (16.3) при $k=0$) величина, стоящая в (18.5) в скобках. Поэтому

$$(vv) = (ll) - (b_{10} c_{10} + b_{20} c_{20} + \ldots + b_{m0} c_{m0}). \tag{18.6}$$

Эта формула является иногда полезным дополнением к формуле (18.5).

Средняя ошибка функции неизвестных. Нередко приходится после решения условных уравнений по способу наименьших квадратов вычислять значение некоторой функции $F(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_m)$ полученных значений неизвестных и находить среднюю ошибку этого значения.

Так как независимыми результатами измерений являются величины l_i, стоящие в правых частях условных уравнений (14.1), то нужно прежде всего выразить F в функции l_i. Тогда, по известной формуле, получим

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial l_1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial l_n} \right)^2 \right], \tag{18.7}$$

где через μ обозначена средняя ошибка каждой из величин l_i.

Можно показать (на этом мы не будем останавливаться), что выражение (18.7) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}\mu_F^2=\mu^2\,[q_{11}F_1^2+2q_{12}F_1F_2+2q_{13}F_1F_3+\ldots+\\ +q_{22}F_2^2+2q_{23}F_2F_3+\ldots+\\ +q_{33}F_3^2+\ldots+\\ +\ldots\ldots\ldots].\end{aligned}\right\}\tag{18.8}$$

Через $F_1, \ldots, F_m$ здесь обозначены частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_k}F(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

а через q_{ik} — элементы обратной матрицы (16.8).

Примером применения формулы (18.8) может служить вычисление средних ошибок величин ω, i, Ω, найденных при помощи соотношений (8.4) и (8.5), после того как найдены средние ошибки входящих в условные уравнения неизвестных $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$.

§ 19. Случай, когда определитель системы нормальных уравнений близок к нулю

Использованные для составления условных уравнений наблюдения могут оказаться недостаточными для надежного вычисления всех неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Аналитически это выразится в том, что определитель системы нормальных уравнений будет близок к нулю, так что по крайней мере одно из этих уравнений будет мало отличаться от линейной комбинации остальных уравнений.

Определитель нормальной системы обозначим через Δ. Близость Δ к нулю обнаружится в процессе решения системы нормальных уравнений в том, что среди делителей окажутся числа, близкие к нулю. Такими делителями в развернутой форме метода исключения (§ 15) являются величины

$$(11.0)=a_{11},\ (22.1),\ (33.2),\ \ldots,\ (mm.\,m-1). \tag{19.1}$$

В компактной форме метода исключения (§ 16) делителями служат величины

$$b_{11},\ b_{22},\ \ldots,\ b_{mm}, \tag{19.2}$$

а в методе Банахевича (§ 17) — величины

$$r_{11},\ r_{22},\ \ldots,\ r_{mm}. \tag{19.3}$$

Делители (19.1) и (19.2) для нормальной системы всегда положительны. Но так как вычисление производится с ограничен-