Можно показать (на этом мы не будем останавливаться), что выражение (18.7) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} \mu_F^2 = \mu^2 [q_{11}F_1^2 + 2q_{12}F_1F_2 + 2q_{13}F_1F_3 + \ldots +\\ + q_{22}F_2^2 + 2q_{23}F_2F_3 + \ldots +\\ + q_{33}F_3^2 + \ldots +\\ + \ldots\ldots\ldots]. \end{aligned}\right\} \quad (18.8)$$

Через $F_1, \ldots, F_m$ здесь обозначены частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

а через q_{ik} — элементы обратной матрицы (16.8).

Примером применения формулы (18.8) может служить вычисление средних ошибок величин ω, i, Ω, найденных при помощи соотношений (8.4) и (8.5), после того как найдены средние ошибки входящих в условные уравнения неизвестных $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$.

§ 19. Случай, когда определитель системы нормальных уравнений близок к нулю

Использованные для составления условных уравнений наблюдения могут оказаться недостаточными для надежного вычисления всех неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Аналитически это выразится в том, что определитель системы нормальных уравнений будет близок к нулю, так что по крайней мере одно из этих уравнений будет мало отличаться от линейной комбинации остальных уравнений.

Определитель нормальной системы обозначим через Δ. Близость Δ к нулю обнаружится в процессе решения системы нормальных уравнений в том, что среди делителей окажутся числа, близкие к нулю. Такими делителями в развернутой форме метода исключения (§ 15) являются величины

$$(11.0) = a_{11},\ (22.1),\ (33.2),\ \ldots,\ (mm.\,m-1). \quad (19.1)$$

В компактной форме метода исключения (§ 16) делителями служат величины

$$b_{11},\ b_{22},\ \ldots,\ b_{mm}, \quad (19.2)$$

а в методе Банахевича (§ 17) — величины

$$r_{11},\ r_{22},\ \ldots,\ r_{mm}. \quad (19.3)$$

Делители (19.1) и (19.2) для нормальной системы всегда положительны. Но так как вычисление производится с ограниченным числом десятичных знаков, накопление ошибок округления может привести к тому, что среди этих делителей окажутся отрицательные числа. По той же причине, если определитель Δ близок к нулю, среди чисел (19.3) могут оказаться чисто мнимые с абсолютной величиной, близкой к нулю.

Соотношение (16.12) показывает, что

$$\Delta = b_{11}b_{22} \ldots b_{mm},$$

откуда, по определению величин b_{ik},

$$\Delta = (11.0)(22.1) \ldots (mm.m-1),$$

а из определения матрицы (17.1) непосредственно вытекает, что

$$\Delta = r_{11}^2 r_{22}^2 \ldots r_{mm}^2.$$

Отсюда ясно, что определитель Δ в том и только в том случае близок к нулю, когда один из делителей близок к нулю.

Поскольку вычисления производятся всегда с ограниченным, заранее фиксированным числом десятичных знаков, весьма важно расположить неизвестные так, чтобы делители, близкие к нулю, появились возможно позже. Тогда вызываемое ими понижение точности отразится на минимальном числе неизвестных. В этом отношении большое преимущество имеет развернутая форма метода исключения, позволяющая на каждом этапе исключения выбирать наиболее целесообразным образом исключаемую неизвестную. При употреблении методов, изложенных в § 16 и 17, может понадобиться уточнение полученных значений неизвестных при помощи одного из способов последовательных приближений, или повторение решения нормальных уравнений с другим порядком неизвестных. В этом последнем случае выгодно при окончательном решении расположить неизвестные в порядке возрастания чисел

$$q_{11}, q_{22}, \ldots, q_{mm},$$

т. е. в порядке убывания веса.

Однако в большинстве случаев внимательное рассмотрение нормальных уравнений позволяет заранее узнать, какая неизвестная (или группа неизвестных) получится с наименьшей точностью. Такая неизвестная должна быть поставлена на последнее место.

Часто применяется следующий прием, позволяющий оценить надежность значений тех неизвестных, которые получаются с наименьшей точностью.

Допустим, что очень близкий к нулю делитель получился после того, как выполнено исключение неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда проделанные вычисления можно использовать для представления этих неизвестных в виде линейных функций x_{m-1} и x_m. Далее можно поступать двояко.

Можно давать неизвестным x_{m-1}, x_m различные подходящие значения, вычислять соответствующие $x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}$ и смотреть, как при этом меняется сумма квадратов остающихся невязок, вычисляемая по формуле (18.5). Чем меньше будет эта сумма, тем лучше будут, с точки зрения принципа наименьших квадратов, соответствующие значения x_{m-1} и x_m.

С другой стороны, можно искать вероятнейшие значения x_{m-1} и x_m. Для этого подставляют найденные выражения $x_1, \ldots, x_{m-2}$ через x_{m-1}, x_m в условные уравнения и полученные таким образом новые условные уравнения с двумя неизвестными решают по способу наименьших квадратов.

Первый способ применяется обычно в тех случаях, когда плохо определяемой оказывается только одна неизвестная. Если же таких неизвестных имеется две или больше, то удобнее и надежнее второй способ.