где C — удвоенная секторная скорость движения по истинной орбите. Так как

$$C = 2\pi ab/P = \mu a^2 \sqrt{1-e}\,.$$

то из формулы (3.10) следует, что

$$c = \mu (AG - BF) \sqrt{1-e^2}. \tag{3.13}$$

§ 4. Видимая орбита

Видимая орбита есть ортогональная проекция истинной орбиты на плоскость, перпендикулярную к лучу зрения. Так как ортогональная проекция конического сечения есть также коническое сечение, то видимая орбита всегда является коническим сечением. В том случае, когда истинная орбита есть эллипс, видимая орбита будет также эллипсом.

Время обращения по видимой орбите, очевидно, равно времени обращения по истинной орбите. Поэтому сопоставление моментов времени, для которых позиционный угол принимает одинаковые значения, дает возможность найти P. Такой способ применим, однако, только для двойных звезд с небольшим периодом обращения.

Проекция каждого диаметра истинной орбиты есть диаметр видимой орбиты. Поэтому центр видимой орбиты есть проекция центра истинной орбиты. Таким образом, соединив центр видимой орбиты с главной звездой, получим проекцию большой оси истинной орбиты, а следовательно, и проекцию периастра. Сравнение позиционного угла проекции периастра с данными наблюдений позволяет найти момент T прохождения через периастр.

Эксцентриситет e истинной орбиты есть отношение расстояния между центром и фокусом к большой полуоси. Так как отношение этих отрезков равно отношению их проекций, то e равно отношению расстояния главной звезды от центра видимой орбиты к половине диаметра, проходящего через главную звезду.

На других предложениях, устанавливающих связь между видимой орбитой и истинной и используемых в графических методах нахождения элементов, останавливаться не будем.

Так как закон площадей имеет место для проекции движения на любую плоскость, то видимое движение спутника подчиняется закону

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const} = c. \tag{4.1}$$

Изучение движения двойной звезды обычно начинается с построения видимой орбиты. В методах нахождения орбит, носящих общее название *геометрических*, все элементы, кроме P и T, получаются при помощи видимой орбиты. Но и при употреблении других методов предварительное построение видимой орбиты может быть очень полезно, так как дает возможность судить о качестве наблюдений и о достаточности имеющихся наблюдений для получения орбиты.

Наблюдения дают ряд точек (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$, лежащих на видимой орбите. Построив эти точки, можно попытаться провести эллипс так, чтобы расстояния между этим эллипсом и точками, представляющими наблюдения, были по возможности малы.

С другой стороны, можно исходить из уравнения видимой орбиты. Это уравнение можно взять в форме

$$a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{11}xy + 2a_{10}x + 2a_{01}y - 1 = 0, \tag{4.2}$$

так как свободный член не может быть равным нулю, поскольку видимая орбита не проходит через главную звезду. Для нахождения пяти коэффициентов этого уравнения можно использовать все имеющиеся точки (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$.

Оба эти способа, являющиеся наиболее прямыми, оказались практически несостоятельными благодаря малой точности наблюдений. В этих чисто геометрических способах совсем не используются ни моменты $t_1, t_2, \ldots$, т. е. наиболее точные данные наблюдений, ни закон площадей (4.1).

Простейшим из применяемых на практике способов получения видимой орбиты является следующий. На плоскости Axy строятся точки, соответствующие наблюдениям (или нормальным местам). Через эти точки проводят достаточно правдоподобный эллипс. Затем проверяют, насколько этот эллипс удовлетворяет закону площадей. Для этого измеряют при помощи планиметра площади надлежаще выбранных секторов и сравнивают их с соответствующими промежутками времени. Пользуясь результатами таких сравнений, меняют форму и положение эллипса до тех пор, пока не будет достигнуто возможно лучшее соблюдение закона площадей.

Способ Джона Гершеля (1833). Строят кривую, дающую позиционный угол θ как функцию времени. С этой кривой, тщательно сглаженной, снимают значения t, соответствующие равноотстоящим значениям θ. Полученная таблица позволяет найти значения $dt/d\theta$, соответствующие ряду значений θ. Формула (4.1) дает

$$\rho = \sqrt{c\, dt/d\theta}. \tag{4.3}$$

Взяв для c произвольное значение, мы можем вычислить относительные значения ρ, соответствующие только что указанным значениям θ. Нанеся на чертеж полученные таким образом точки (θ, ρ), получим кривую, удовлетворяющую закону площадей. Последовательными пробами надо изменить эту кривую так, чтобы она стала эллипсом.

Сравнение наблюденных и относительных расстояний позволяет найти масштаб этих последних.

Способ Гершеля особенно выгоден в тех случаях, когда измерения ρ заметно уступают в точности измерениям θ, как это имеет место для многих старинных рядов наблюдений, или для особенно тесных пар.

Способ Тиле (1866). Если соотношение (4.1) разрешить относительно $d\theta$ и проинтегрировать, то получим

$$\theta - \theta_1 = c \int\limits_{t_1}^{t} \rho^{-2}\, dt. \tag{4.4}$$

Построим кривую, откладывая t по оси абсцисс и ρ^{-2} по оси ординат. Интегрирование этой кривой между двумя значениями t, для которых известны θ, даст постоянные θ_1 и c, входящие в формулу (4.4). После этого надо вычислить по формуле (4.4) значения θ, соответствующие моментам наблюдений, и сопоставить их с наблюденными значениями θ. Добившись, путем проб, достаточного совпадения, мы будем иметь видимую орбиту, подчиняющуюся закону площадей.

Поскольку интегрирование эмпирической функции выполняется с меньшей относительной ошибкой, нежели дифференцирование, способ Тиле имеет известные преимущества перед способом Гершеля.

После того как одним из только что указанных способов построена видимая орбита (целиком или в значительной части), можно найти коэффициенты ее уравнения (4.2). Для этого нужно измерить координаты достаточного числа точек видимой орбиты и решить соответствующую систему линейных уравнений.

Учитывая небольшую точность произведенных построений, здесь редко прибегают к способу наименьших квадратов. Очень часто довольствуются следующим приемом (предложенным С. П. Глазенапом в 1889 г.), сокращающим вычисления до минимума. Обозначим через x_1 и x_2 абсциссы точек пересечения кривой (4.2) с осью x. Так как эти величины удовлетворяют уравнению

$$a_{20}x^2 + 2a_{10}x - 1 = 0,$$

то

$$a_{20} = \frac{-1}{x_1x_2}; \quad 2a_{10} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}.$$

Подобно этому

$$a_{02} = \frac{-1}{y_1y_2}; \quad 2a_{01} = \frac{y_1 + y_2}{y_1y_2},$$

если через y_1 и y_2 обозначить ординаты точек пересечения с осью y.

Для вычисления пятого коэффициента нужно в формулу

$$-2a_{11} = \frac{a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y - 1}{xy}$$

подставить координаты одной или нескольких точек, выбранных на наиболее надежных участках видимой орбиты. Конечно, эти точки надо брать так, чтобы абсолютная величина произведения xy была по возможности больше.

Нахождение прямолинейной видимой орбиты было подробно изучено Арендом [1959].

§ 5. Метод Ковальского

Методы вычисления орбит двойных звезд делятся на *геометрические* и *динамические.*

В геометрических методах пять геометрических элементов получаются при помощи предварительно найденной видимой орбиты. Таким образом, в этих методах для нахождения всех элементов, кроме P и T, непосредственно используется лишь то свойство движения, что траектория спутника есть коническое сечение.

В динамических методах видимая орбита не используется, но для нахождения всех элементов широко используются, с самого начала, все свойства движения.

Геометрические методы впервые были предложены Джоном Гершелем в 1833 г., Вилларсо (Y. Villarceau) в 1849 г. и М. А. Ковальским в 1872 г. Графические способы для получения истинной орбиты по видимой дали Клинкерфюс (W. Klinkerfues) в 1877 г. и Цвирс (H. Zwiers) в 1896 г. Наиболее употребительными в настоящее время являются метод Ковальского*) и метод Цвирса.

Формулы, выражающие пять геометрических элементов истинной орбиты через коэффициенты уравнения

$$a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{11}xy + 2a_{10}x + 2a_{01}y - 1 = 0 \qquad (5.1)$$

видимой орбиты, в методе Ковальского получаются следующим образом.

В системе координат $Axyz$ (см. рис. 17) уравнение (5.1) изображает эллиптический цилиндр с образующими, параллельными

*) Работа, в которой был опубликован (без вывода формул) этот метод, была переиздана [Ковальский, 1951] с обстоятельными комментариями Д. Я. Мартынова, содержащими также историю опубликования и распространения этого метода.