если через y_1 и y_2 обозначить ординаты точек пересечения с осью y.

Для вычисления пятого коэффициента нужно в формулу

$$-2a_{11}=\frac{a_{20}x^2+a_{02}y^2+2a_{10}x+2a_{01}y-1}{xy}$$

подставить координаты одной или нескольких точек, выбранных на наиболее надежных участках видимой орбиты. Конечно, эти точки надо брать так, чтобы абсолютная величина произведения xy была по возможности больше.

Нахождение прямолинейной видимой орбиты было подробно изучено Арендом [1959].

§ 5. Метод Ковальского

Методы вычисления орбит двойных звезд делятся на *геометрические* и *динамические*.

В геометрических методах пять геометрических элементов получаются при помощи предварительно найденной видимой орбиты. Таким образом, в этих методах для нахождения всех элементов, кроме P и T, непосредственно используется лишь то свойство движения, что траектория спутника есть коническое сечение.

В динамических методах видимая орбита не используется, но для нахождения всех элементов широко используются, с самого начала, все свойства движения.

Геометрические методы впервые были предложены Джоном Гершелем в 1833 г., Вилларсо (Y. Villarceau) в 1849 г. и М. А. Ковальским в 1872 г. Графические способы для получения истинной орбиты по видимой дали Клинкерфюс (W. Klinkerfues) в 1877 г. и Цвирс (H. Zwiers) в 1896 г. Наиболее употребительными в настоящее время являются метод Ковальского*) и метод Цвирса.

Формулы, выражающие пять геометрических элементов истинной орбиты через коэффициенты уравнения

$$a_{20}x^2+a_{02}y^2+2a_{11}xy+2a_{10}x+2a_{01}y-1=0 \qquad (5.1)$$

видимой орбиты, в методе Ковальского получаются следующим образом.

В системе координат $Axyz$ (см. рис. 17) уравнение (5.1) изображает эллиптический цилиндр с образующими, параллельными

*) Работа, в которой был опубликован (без вывода формул) этот метод, была переиздана [Ковальский, 1951] с обстоятельными комментариями Д. Я. Мартынова, содержащими также историю опубликования и распространения этого метода.

лучу зрения Az. Истинная орбита есть пересечение этого цилиндра плоскостью NBN'.

Рассмотрим, с другой стороны, орбитальную систему координат, в которой ось $A\xi$ направлена в периастр, ось $A\eta$ в точку орбиты, для которой $v=90°$, а ось $A\zeta$ по нормали к плоскости NBN'. В этой системе истинная орбита представляется уравнениями $\zeta=0$ и

$$(ae+\xi)^2 a^{-2}+\eta^2 b^{-2}=1. \tag{5.2}$$

Чтобы установить зависимость между координатами систем $Axyz$ и $A\xi\eta\zeta$, преобразуем первую систему во вторую рядом элементарных вращений. Вращение триэдра $Axyz$ около оси Az на угол Ω даст триэдр $Ax'y'z'$, у которого ось Ax' совпадает с линией узлов AN. Повернув триэдр $Ax'y'z'$ около оси Ax' на угол i, мы получим триэдр $Ax''y''z''$, у которого плоскость $Ax''y''$ совпадает с плоскостью истинной орбиты. Если, наконец, повернуть триэдр $Ax''y''z''$ около оси Az'' на угол ω, то получим триэдр $A\xi\eta\zeta$. Очевидно,

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\Omega - y'\sin\Omega,\\ y &= x'\sin\Omega + y'\cos\Omega,\\ z &= z' \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x' &= x'',\\ y' &= y''\cos i - z''\sin i,\\ z' &= y''\sin i + z''\cos i, \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} x &= x''\cos\Omega - y''\sin\Omega\cos i + z''\sin\Omega\sin i,\\ y &= x''\sin\Omega + y''\cos\Omega\cos i - z''\cos\Omega\sin i. \end{aligned}$$

Если эти выражения подставить в уравнение (5.1) и положить $z''=0$, то получим уравнение истинной орбиты, отнесенное к осям $Ax''y''$:

$$\begin{aligned} a_{20}(x''\cos\Omega - y''\sin\Omega\cos i)^2 + a_{02}(x''\sin\Omega + y''\cos\Omega\cos i)^2 +\\ + 2a_{11}(x''\cos\Omega - y''\sin\Omega\cos i)(x''\sin\Omega + y''\cos\Omega\cos i) +\\ + 2a_{10}(x''\cos\Omega - y''\sin\Omega\cos i) +\\ + 2a_{01}(x''\sin\Omega + y''\cos\Omega\cos i) - 1 = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Но координатная система $Ax''y''z''$ получается из системы $A\xi\eta\zeta$ поворотом около оси $A\zeta$ на угол $-\omega$, поэтому

$$\begin{aligned} \xi &= x''\cos\omega + y''\sin\omega,\\ \eta &= -x''\sin\omega + y''\cos\omega. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнение (5.2), получим уравнение истинной орбиты в системе $Ax''y''$:

$$a^{-2}(x''\cos\omega + y''\sin\omega + ae)^2 + b^{-2}(-x''\sin\omega + y''\cos\omega)^2 = 1.$$

Это уравнение может отличаться от (5.3) лишь постоянным множителем. Обозначив этот множитель через $\varkappa$, напишем, что коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Это даст

$$a_{20}\cos^2\Omega + a_{02}\sin^2\Omega + a_{11}\sin 2\Omega = \varkappa(a^{-2}\cos^2\omega + b^{-2}\sin^2\omega), \quad (5.4)$$

$$\cos^2 i\,(a_{20}\sin^2\Omega + a_{02}\cos^2\Omega - a_{11}\sin 2\Omega) = \\ = \varkappa(a^{-2}\sin^2\omega + b^{-2}\cos^2\omega), \quad (5.5)$$

$$\cos i\,(-a_{20}\sin 2\Omega + a_{02}\sin 2\Omega + 2a_{11}\cos 2\Omega) = \\ = \varkappa(a^{-2} - b^{-2})\sin 2\omega, \quad (5.6)$$

$$a_{01}\sin\Omega + a_{10}\cos\Omega = \varkappa e a^{-1}\cos\omega, \quad (5.7)$$

$$\cos i\,(a_{01}\cos\Omega - a_{10}\sin\Omega) = \varkappa e a^{-1}\sin\omega, \quad (5.8)$$

$$1 = \varkappa(1 - e^2). \quad (5.9)$$

Из этих шести соотношений надо исключить $\varkappa$ и найти a, e, Ω, i, ω.

Заметим, прежде всего, что введение параметра p вместо большой полуоси a позволяет, учитывая (5.9), представить правые части равенств (5.4)—(5.8) в таком виде:

$$\varkappa(a^{-2}\cos^2\omega + b^{-2}\sin^2\omega) = p^{-2} - e^2p^{-2}\cos^2\omega,$$

$$\varkappa(a^{-2}\sin^2\omega + b^{-2}\cos^2\omega) = p^{-2} - e^2p^{-2}\sin^2\omega,$$

$$\varkappa(a^{-2} - b^{-2})\sin 2\omega = -e^2p^{-2}\sin 2\omega,$$

$$\varkappa e a^{-1} = ep^{-1}.$$

Почленное перемножение равенств (5.7) и (5.8) дает

$$\cos i\,(a_{01}^2\sin 2\Omega - a_{10}^2\sin 2\Omega + 2a_{01}a_{10}\cos 2\Omega) = e^2p^{-2}\sin 2\omega.$$

Сложив это равенство с (5.6), получим

$$(a_{02} - a_{20} + a_{01}^2 - a_{10}^2)\sin 2\Omega + 2(a_{11} + a_{01}a_{10})\cos 2\Omega = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{2N}{M - L}, \quad (5.10)$$

где

$$L = a_{02} + a_{01}^2; \quad M = a_{20} + a_{10}^2; \quad N = a_{11} + a_{01}a_{10}. \quad (5.11)$$

Теперь легко найти i. В самом деле, почленное вычитание равенств (5.4) и (5.5) дает

$$a_{02}\sin^2\Omega + a_{20}\cos^2\Omega + a_{11}\sin 2\Omega - \\ - \cos^2 i\,(a_{02}\cos^2\Omega + a_{20}\sin^2\Omega - a_{11}\sin 2\Omega) = - e^2p^{-2}\cos 2\omega.$$

С другой стороны, если уравнения (5.7) и (5.8) возвести почленно в квадрат и вычесть одно из другого, то это даст

$$(a_{01}\sin\Omega + a_{10}\cos\Omega)^2 - \cos^2 i\,(a_{01}\cos\Omega - a_{10}\sin\Omega)^2 = e^2p^{-2}\cos 2\omega.$$

Сложение двух последних равенств, исключающее ω, дает

$$\cos^2 i = \frac{L\sin^2\Omega + M\cos^2\Omega + N\sin 2\Omega}{L\cos^2\Omega + M\sin^2\Omega - N\sin 2\Omega}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}^2 i = \frac{(L-M)\cos 2\Omega - 2N\sin 2\Omega}{L\sin^2\Omega + M\cos^2\Omega + N\sin 2\Omega}, \tag{5.12}$$

$$1 + \sec^2 i = \frac{L+M}{L\sin^2\Omega + M\cos^2\Omega + N\sin 2\Omega}. \tag{5.13}$$

Наиболее удобные формулы для вычисления Ω и i получим, связав это вычисление с одновременным нахождением p.

Если уравнение (5.8), возведенное предварительно в квадрат, прибавить почленно к уравнению (5.5), то получим

$$p^{-2} = \cos^2 i\,(L\cos^2\Omega + M\sin^2\Omega - N\sin 2\Omega),$$

или

$$p^{-2} = L\sin^2\Omega + M\cos^2\Omega + N\sin 2\Omega. \tag{5.14}$$

Составляя это равенство с (5.12), находим

$$p^{-2}\operatorname{tg}^2 i = (L-M)\cos 2\Omega - 2N\sin 2\Omega,$$

что, совместно с (5.10), дает

$$\left.\begin{aligned} p^{-2}\operatorname{tg}^2 i\,\sin 2\Omega &= -2N,\\ p^{-2}\operatorname{tg}^2 i\,\cos 2\Omega &= L - M. \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Эти уравнения вполне однозначно определяют Ω и одновременно дают $p^{-2}\operatorname{tg}^2 i$.

Вместо того, чтобы вычислять p по формуле (5.14), можно воспользоваться значительно более простым выражением. В самом деле, равенства (5.13) и (5.14) дают

$$p^{-2}(1 + \sec^2 i) = L + M,$$

откуда

$$2p^{-2} = L + M - p^{-2}\operatorname{tg}^2 i \tag{5.16}$$

Найдя отсюда p^{-2}, мы будем знать и $\operatorname{tg}^2 i$. Угол i однозначно определится условием:

$0 \leqslant i < 90°$, если позиционные углы возрастают;
$90° < i \leqslant 180°$, если позиционные углы убывают.

Мы нашли, таким образом, элементы Ω, i, p. Уравнения (5.7) и (5.8), которые можно написать так:

$$\left.\begin{aligned} ep^{-1}\sin\omega &= (a_{01}\cos\Omega - a_{10}\sin\Omega)\cos i, \\ ep^{-1}\cos\omega &= a_{01}\sin\Omega + a_{10}\cos\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

позволяют найти e и ω.

Чтобы найти P и T, возьмем несколько наиболее надежных наблюдений позиционных углов (t_k, θ_k). По вытекающей из (3.3) формуле

$$\operatorname{tg}(v_k + \omega) = \operatorname{tg}(\theta_k - \Omega)\sec i, \tag{5.18}$$

где $v_k+\omega$ и $\theta_k - \Omega$ находятся всегда в одном и том же квадранте, вычисляем соответствующие истинные аномалии v_k. Это позволяет найти для тех же моментов средние аномалии:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E_k = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_k; \quad M_k = E_k - e\sin E_k. \tag{5.19}$$

Поскольку $M = n(t - T)$, каждое наблюдение дает возможность написать условное уравнение

$$nt_k - nT = M_k.$$

Решение этих уравнений дает $n = 360°/P$ и nT.

Для вычисления последнего элемента — большой полуоси a — можно было бы воспользоваться соотношением $p = a(1 - e^2)$. Но для получения возможно более надежного значения этого весьма важного элемента поступают обычно иначе.

Выберем ряд наблюдений (t_k, ρ_k, θ_k), дающих наиболее надежные значения расстояний ρ_k. Вычислив по формулам (3.3) соответствующие орбитальные координаты r_k, v_k, получим ряд значений большой полуоси:

$$a = r_k(1 + e\cos v_k)(1 - e^2)^{-1},$$

что позволяет найти наиболее вероятное значение a.

§ 6. Метод Тиле — Иннеса

Среди динамических методов одним из наиболее часто применяемых является метод Тиле — Иннеса. Основные идеи этого метода были даны Тиле (T. N. Thiele) в 1883 г. Но он вошел в употребление лишь после 1926 г., когда Иннес (R. T. A. Innes) придал ему более удобную форму. Постоянные Тиле — Иннеса