Найдя отсюда p^{-2}, мы будем знать и $\operatorname{tg}^2 i$. Угол i однозначно определится условием:

$0 \leqslant i < 90°$, если позиционные углы возрастают;
$90° < i \leqslant 180°$, если позиционные углы убывают.

Мы нашли, таким образом, элементы Ω, i, p. Уравнения (5.7) и (5.8), которые можно написать так:

$$\left.\begin{aligned} ep^{-1}\sin\omega &= (a_{01}\cos\Omega - a_{10}\sin\Omega)\cos i, \\ ep^{-1}\cos\omega &= a_{01}\sin\Omega + a_{10}\cos\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

позволяют найти e и ω.

Чтобы найти P и T, возьмем несколько наиболее надежных наблюдений позиционных углов (t_k, θ_k). По вытекающей из (3.3) формуле

$$\operatorname{tg}(v_k + \omega) = \operatorname{tg}(\theta_k - \Omega)\sec i, \tag{5.18}$$

где $v_k+\omega$ и $\theta_k - \Omega$ находятся всегда в одном и том же квадранте, вычисляем соответствующие истинные аномалии v_k. Это позволяет найти для тех же моментов средние аномалии:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E_k = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_k; \quad M_k = E_k - e\sin E_k. \tag{5.19}$$

Поскольку $M = n(t - T)$, каждое наблюдение дает возможность написать условное уравнение

$$nt_k - nT = M_k.$$

Решение этих уравнений дает $n = 360°/P$ и nT.

Для вычисления последнего элемента — большой полуоси a — можно было бы воспользоваться соотношением $p = a(1 - e^2)$. Но для получения возможно более надежного значения этого весьма важного элемента поступают обычно иначе.

Выберем ряд наблюдений (t_k, ρ_k, θ_k), дающих наиболее надежные значения расстояний ρ_k. Вычислив по формулам (3.3) соответствующие орбитальные координаты r_k, v_k, получим ряд значений большой полуоси:

$$a = r_k(1 + e\cos v_k)(1 - e^2)^{-1},$$

что позволяет найти наиболее вероятное значение a.

§ 6. Метод Тиле — Иннеса

Среди динамических методов одним из наиболее часто применяемых является метод Тиле — Иннеса. Основные идеи этого метода были даны Тиле (T. N. Thiele) в 1883 г. Но он вошел в употребление лишь после 1926 г., когда Иннес (R. T. A. Innes) придал ему более удобную форму. Постоянные Тиле — Иннеса

(§ 3) были введены в употребление одновременно с этим методом.

Видимая орбита используется здесь для получения: во-первых, величины c, т. е. удвоенной секторной скорости видимого движения; во-вторых, трех возможно более надежных нормальных мест (t_g, x_g, y_g), где $g=1, 2, 3$.

Промежутки времени между нормальными местами должны быть, конечно, достаточно велики, однако не в ущерб точности выбранных нормальных мест. Чем больше будет площадь треугольника, образованного точками (x_g, y_g), тем лучше.

Пусть Δ_{gh} есть удвоенная площадь треугольника, образованного главной звездой и положениями спутника в моменты t_g и t_h. Формулы (3.7), дающие

$$x_g = AX_g + FY_g; \quad y_g = BX_g + GY_g. \tag{6.1}$$

показывают, что

$$\Delta_{gh} = x_g y_h - x_h y_g = (AG - BF)(X_g Y_h - X_h Y_g).$$

Легко видеть, что

$$X_g Y_h - X_h Y_g = \sqrt{1-e^2}\,[\sin(E_h - E_g) - e(\sin E_h - \sin E_g)],$$

а так как, на основании (3.13),

$$(AG - BF)\sqrt{1-e^2} = c\mu^{-1},$$

то

$$\Delta_{gh} = c\mu^{-1}[\sin(E_h - E_g) - e(\sin E_h - \sin E_g)]. \tag{6.2}$$

Пользуясь уравнением Кеплера

$$E - e\sin E = \mu(t - T), \tag{6.3}$$

эту формулу можно написать так:

$$\Delta_{gh} = c\mu^{-1}[\sin(E_h - E_g) - (E_h - E_g) + \mu(t_h - t_g)]. \tag{6.4}$$

Положим

$$u = E_2 - E_1; \quad v = E_3 - E_2.$$

Формула (6.4) позволяет составить следующие три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} t_2 - t_1 - \Delta_{12}c^{-1} &= \mu^{-1}(u - \sin u), \\ t_3 - t_2 - \Delta_{23}c^{-1} &= \mu^{-1}(v - \sin v), \\ t_3 - t_1 - \Delta_{13}c^{-1} &= \mu^{-1}[u + v - \sin(u+v)], \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

из которых можно найти три неизвестные величины μ^{-1}, u, v.

Чтобы вычислить эксцентрические аномалии, заметим прежде всего, что очевидная комбинация уравнений (6.5) дает

$$\Delta_{12} + \Delta_{23} - \Delta_{13} = c\mu^{-1}[\sin u + \sin v - \sin(u+v)]. \tag{6.6}$$

С другой стороны, формула (6.2) показывает, после некоторых выкладок, что

$$\Delta_{23}\sin u - \Delta_{12}\sin v = c\mu^{-1} e \sin E_2 [\sin u + \sin v - \sin(u+v)],$$
$$\Delta_{23}\cos u + \Delta_{12}\cos v - \Delta_{13} = c\mu^{-1} e \cos E_2 [\sin u + \sin v - \sin(u+v)].$$

Если эти равенства разделить почленно на равенство (6.6), то получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} e\sin E_2 &= Q(\Delta_{23}\sin u - \Delta_{12}\sin v), \\ e\cos E_2 &= Q(\Delta_{23}\cos u + \Delta_{12}\cos v + \Delta_{13}), \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

где

$$Q = (\Delta_{12} + \Delta_{23} - \Delta_{13})^{-1}, \tag{6.8}$$

позволяющие найти e, E_2, а следовательно, и

$$E_1 = E_2 - u; \quad E_3 = E_2 + v.$$

После этого уравнение (6.3) даст три значения для T. Достаточно хорошее совпадение этих значений контролирует проделанную работу.

Этим заканчивается вычисление динамических элементов μ, T и e. Заметим, что

$$n = 57°,2958\mu; \quad P = 2\pi/\mu = 360°/n.$$

Чтобы найти векторные элементы A, B, F и G, нужно вычислить редуцированные орбитальные координаты для двух моментов наблюдений, например, t_1 и t_3, и воспользоваться уравнениями (6.1). Переход к обычным элементам выполняется по формулам (3.9).

Решение основной системы (6.5) надо начинать с получения приближенного значения μ. Если наблюдения охватывают период обращения, то легко получить весьма приближенное значение P, а следовательно, и μ. В противном случае приходится начинать, выбрав какое-либо правдоподобное значение μ. С этим значением из двух первых уравнений (6.5) находят (пользуясь таблицей функции $\operatorname{ams} x = x - \sin x$) значения u и v; если их сумма не совпадает со значением $u+v$, даваемым третьим уравнением, то принятое значение μ соответствующим образом меняют.

Когда наблюдения позиционных углов позволяют найти вполне надежное значение P, а следовательно, и μ, уравнения (6.5) бывает выгодно представить в форме

$$\left.\begin{aligned} \mu(t_2 - t_1) - \Delta_{12}\mu c^{-1} &= u - \sin u, \\ \mu(t_3 - t_2) - \Delta_{23}\mu c^{-1} &= v - \sin v, \\ \mu(t_3 - t_1) - \Delta_{13}\mu c^{-1} &= u + v - \sin(u+v) \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

и решать относительно c, u и v. Особенно важно идти этим путем в тех случаях, когда наблюдения из-за наличия в них ошибок плохо удовлетворяют закону площадей.

Встречается на практике и такой случай, когда μ и c найдены из предварительной дискуссии наблюдений с большей точностью, чем могут дать уравнения (6.9). В этом случае из уравнений (6.9) находят u, v и $u+v$, а получающуюся между этими величинами невязку распределяют поровну.

Опыт показывает, что метод Ковальского (или другие геометрические методы) следует предпочесть в тех случаях, когда наблюдения покрывают достаточно равномерно всю (или почти всю) орбиту. Но если между дугами орбиты, хорошо покрытыми наблюдениями, имеются значительные разрывы, то построение видимой орбиты может содержать слишком много произвола. В таких случаях метод Тиле — Иннеса является более надежным.

В заключение укажем работы Аренда [1941] и Домманже [1959], в которых рассматриваются математические вопросы, связанные с методом Тиле — Иннеса.

§ 7. Особые случаи вычисления орбиты двойной звезды

При нахождении орбиты двойной звезды иногда приходится прибегать к специальным приемам, учитывающим особенности рассматриваемого конкретного случая.

Если видимая орбита очень вытянута (что всегда имеет место, если i близко к 90°), вычисление элементов должно по возможности базироваться только на расстояниях. В предельном случае, при $i=90°$ позиционные углы (принимающие скачкообразно только два значения, отличающиеся на 180°) непосредственно дают элементы Ω и i, но не могут быть использованы для нахождения остальных элементов. Наоборот, если видимая орбита широко открыта, то расстояния имеют, вообще говоря, меньшее значение, нежели позиционные углы.

В течение долгого времени наибольшее внимание привлекали пары с быстрым орбитальным движением. Эти пары принадлежат, за редкими исключениями, к числу весьма тесных, наблюдения которых обременены особенно большими относительными ошибками. Применение к таким парам обычных методов приводит к надежным результатам лишь в тех случаях, когда наблюдения охватывают не менее половины орбиты. Вследствие этого вычисление орбит для звезд, у которых спутник описал только небольшую дугу, и имеющих периоды во много сотен лет, до недавнего времени не привлекало внимания. Между тем вычисление орбит в этих случаях, иначе говоря, вычисление орбит по наблюдениям, покрывающим небольшую дугу, весьма