а по оси ординат — взятые из таблиц значения θ_0. Таким образом, для каждого ω получим особую кривую.

На такой пучок кривых накладываем диаграмму (M', θ), начерченную на прозрачной бумаге. Наложение надо сделать так, чтобы оси были строго параллельны.

Так как

$$M = n(t - T)$$

то M и M' отличаются между собой на постоянную величину. Ординаты θ и θ_0 тоже отличаются только на постоянную величину. Поэтому, передвигая диаграмму (M', θ) по диаграмме (M, θ_0) так, чтобы оси координат оставались параллельными, мы должны получить наложение точек θ на эфемеридную кривую, если значения e, i и ω выбраны правильно. Измерив расстояние между осями абсцисс, получим Ω. Расстояние между осями ординат даст $n(T - T')$, а следовательно, и T. Путем последовательных проб находится та эфемеридная кривая, которая наилучшим образом представляет наблюденные позиционные углы. Вместе с тем будут найдены все элементы, кроме большой полуоси. Вычисление большой полуоси выполняется способом, указанным в § 5.

Заметим, что в случае обратного движения (когда $i > 90°$) нужно входить в таблицы с аргументом $180° - i$, а формулу (7.2) заменить такой:

$$M' = -n(t - T').$$

Формула (7.1) показывает, как надо пользоваться таблицами для построения кривых, если $\omega > 90°$.

Если бы оказалось целесообразным искать элементы с большей точностью, чем дают эфемеридные кривые, построенные по таблицам Экенберга, то можно вычислить положение спутника для нескольких систем элементов, близких к найденным, и найти сумму квадратов отклонений от наблюдений для каждой такой системы. Систему элементов, для которой сумма квадратов отклонений окажется наименьшей, можно считать наилучшей.

Изложенный метод базируется целиком на позиционных углах. Это делает его мало пригодным в тех случаях, когда видимая орбита представляет собой сильно вытянутый эллипс. Достоинством метода является представляемая им возможность оценить степень надежности полученных элементов.

§ 8. Исправление орбит двойных звезд

Если орбита двойной звезды не дает вполне удовлетворительного представления наблюдений, то ее подвергают полному или частичному исправлению. Применяемые для этого методы дифференциального исправления имеют различную форму, в зависимости от того, какие употребляются элементы и какие имеются вспомогательные таблицы.

Пусть исправляются элементы a, φ, n, T, Ω, i, ω. Приращения этих элементов связаны с приращениями координат соотношениями

$$\Delta\Omega + \theta_i \Delta i + \theta_\omega \Delta\omega + \theta_\varphi \Delta\varphi + \theta_\tau \Delta\tau + \theta_n \Delta n = \Delta\theta, \qquad (8.1)$$

$$\rho_a \Delta a + \rho_i \Delta i + \rho_\omega \Delta\omega + \rho_\varphi \Delta\varphi + \rho_\tau \Delta\tau + \rho_n \Delta n = \Delta\rho, \qquad (8.2)$$

где положено

$$\Delta\tau = -n\,\Delta T.$$

Входящие сюда частные производные θ и ρ по элементам легко находятся дифференцированием формул (3.3) и (3.4). Ниже мы приведем окончательные результаты, представленные в удобном для вычислений виде.

Поправки $\Delta\Omega$, Δi, $\Delta\omega$, $\Delta\varphi$ и $\Delta\tau$, так же как $\Delta\theta$, будем считать выраженными в градусах; Δn — в градусах, деленных на год; Δa и $\Delta\rho$ — в секундах дуги.

Подставив в правые части (8.1) и (8.2) разности «наблюдение — вычисление» для всех нормальных мест и решив полученную совокупность уравнений по способу наименьших квадратов, найдем вероятнейшие поправки элементов. Но здесь следует учесть, что точность измерения θ убывает вместе с ρ. Поэтому уравнения (8.1) умножают предварительно на

$$\nu = \rho''/57{,}^\circ 3, \qquad (8.3)$$

так что искомые поправки элементов определяются условием

$$\sum (\nu\,\Delta\theta)^2 + \sum (\Delta\rho)^2 = \text{minimum}. \qquad (8.4)$$

Уравнения (8.2) используют значительно меньше, чем (8.1). Уравнения (8.2) употребляются, главным образом, для не очень тесных пар и для тех нормальных мест, для которых ρ достаточно велико; во всех остальных случаях ограничиваются уравнениями (8.1).

Для вычисления коэффициентов уравнения (8.1), уже умноженного на (8.3), могут быть употреблены следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= (2 + e\sin i)\sin E; \quad e = \sin\varphi, \\ \lambda &= -\nu\,\mathrm{tg}\, i\,\sin(\theta - \Omega)\cos(v + \omega), \end{aligned}\right\} \qquad (8.5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\nu\theta_\Omega = \nu; \quad \nu\theta_i = \lambda; \quad \nu\theta_\omega = \nu\cos i\left(\frac{r}{\rho}\right)^2, \\ &\nu\theta_\varphi = \nu\theta_\omega \varkappa \frac{a}{r}; \qquad \nu\theta_\tau = -\nu\theta_\omega \cos\varphi\left(\frac{a}{r}\right)^2, \\ &\nu\theta_n = -\nu\theta_\tau (t - T). \end{aligned}\right\} \qquad (8.6)$$

При употреблении тех же вспомогательных величин (8.5) коэффициенты уравнения (8.2) выражаются так:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_a = \frac{\rho}{a}; \quad \rho_i = \lambda \operatorname{tg}(\theta - \Omega),\\
&\rho_\omega = \lambda \sin i; \quad \rho_\varphi = \frac{a}{r}\left[\varkappa\rho_\omega - \nu\cos\varphi\cos v\right],\\
&\rho_\tau = -\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[\rho_\omega\cos\varphi + \nu\sin\varphi\sin E\right],\\
&\rho_n = -\rho_\tau(t - T).
\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Таблицы прямоугольных орбитальных координат X и Y позволяют вычислить коэффициенты уравнения (8.1) следующим образом. Прежде всего по аргументам e и

$$M = n(t - T)$$

из таблиц находим как X, Y, так и их частные производные по каждому из аргументов. Затем находим v и $\theta - \Omega$:

$$\operatorname{tg} v = Y/X; \qquad \operatorname{tg}(\theta - \Omega) = \operatorname{tg}(v + \omega)\cos i$$

и вспомогательные величины

$$\begin{aligned}
&g = \cos(\theta - \Omega)\sin i,\\
&l = \frac{\cos v}{X} = \frac{\sin v}{Y},\\
&h = -l\sin v; \quad k = +l\cos v.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_i = -g\sin(\theta - \Omega)\sec i;\\
&\theta_\omega = (1 - g^2)\sec i,\\
&\theta_e = 57{,}3\theta_\omega(hX_e + kY_e),\\
&\theta_\tau = 57{,}3\theta_\omega(hX_M + kY_M),\\
&\theta_n = \theta_\tau(t - T).
\end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

При употреблении векторных элементов уравнения (8.1) и (8.2) заменяются, очевидно, такими:

$$\left.\begin{aligned}
X\,\Delta A + Y\,\Delta F + P_x\,\Delta e + Q_x\,\Delta\tau + R_x\,\Delta n = \Delta x,\\
X\,\Delta B + Y\,\Delta G + P_y\,\Delta e + Q_y\,\Delta\tau + R_y\,\Delta n = \Delta y,
\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

где

$$\begin{aligned}
&P_x = AX_e + FY_e; \qquad P_y = BX_e + GY_e,\\
&Q_x = AX_M + FY_M; \qquad Q_y = BX_M + GY_M,\\
&R_x = (t - T)\,Q_x; \qquad R_y = (t - T)\,Q_y.
\end{aligned}$$

В некоторых случаях для вычисления частных производных X и Y могут оказаться полезными следующие легко выводимые формулы:

$$X_e = -1 - SY^2; \quad Y_e = SXY,$$

$$X_M = -0{,}017453\sqrt{1-e^2}\,SY,$$

$$Y_M = +0{,}017453\,(1-e^2)^{3/2}\,S\,(X+e),$$

где

$$S = 1/(1-e^2)\,(1-e^2-eX),$$

причем M выражено в градусах.

В заключение заметим, что анализ даваемых рассматриваемой системой элементов невязок с наблюдениями часто позволяет очень просто выполнить частичное исправление элементов. Так, например, если сдвиг кривой (t, θ) параллельно оси ординат заметно улучшает представление наблюдений, то величина этого сдвига дает $\Delta\Omega$. Сдвиг этой же кривой параллельно оси абсцисс, улучшающий представление наблюдений, дает ΔT. Среднее арифметическое из $\Delta\rho$ позволяет судить о поправке Δa.