изложением лишь основ этого метода и не довел его до удобоприменимой на практике формы. Поэтому с именем Ньютона связывают обычно только второй из указанных им методов, который он развил полностью и пояснил примерами. Этот метод был использован, как уже отмечалось (§ 6 гл. I), для нахождения орбит многих комет. Метод был дан Ньютоном в геометрической форме, в виде пяти лемм, а все более сложные вычисления заменены в нем графическими построениями. Одна из лемм устанавливает зависимость между геоцентрическими расстояниями кометы в моменты двух крайних наблюдений. Лемма дает эту зависимость хотя и приближенно, но не менее точно, чем уравнение Ольберса (§ 7 гл. IX).

Другая лемма является геометрическим выражением уравнения Эйлера (§ 11 гл. V), лежащего в основе как метода Ольберса, так и всех его позднейших модификаций.

В 1839 г. Плантамур представил метод Ньютона в аналитической форме. Но особенно глубокий анализ этого метода был дан А. Н. Крыловым [1911, 1925], показавшим, что по своим основным идеям этот метод близок к современным и может дать, несмотря на полуграфический характер, достаточную для практических целей точность.

В течение первой половины XVIII в. было сделано много попыток улучшить метод Ньютона (Грэгори в 1717 г.; Бугер в 1733 г.; Ж. Кассини в 1740 г.; Шэзо в 1744 г.; Баркер в 1757 г.), но они не дали полезных результатов. Кометные орбиты в течение всего XVIII столетия нередко вычислялись так называемым «методом ложных положений», представлявшим собой не что иное, как рудиментарную форму метода вариации геоцентрических расстояний (§ 3 гл. XI). Распространению этого метода особенно способствовали знаменитые учебники астрономии Лакайля (пять изданий: 1746, 1755, 1761, 1764, 1780) и Лаланда (три издания: 1764, 1771, 1792).

§ 2. Работы Эйлера и Ламберта

Путь к дальнейшему прогрессу в создании методов вычисления орбит был открыт книгой Эйлера «Теория движения планет и комет, содержащая удобный метод для нахождения из немногих наблюдений как планетных, так и кометных орбит. С приложением вычислений, дающих истинный путь кометы, наблюдавшейся в 1680 и 1681 годах, а также той, которая была видна недавно» [Эйлер, 1743].

Здесь впервые задача двух тел была рассмотрена аналитически и притом со значительной полнотой. Так, для случая движения по орбите, эксцентриситет которой близок к единице, Эйлер дал разложения орбитальных координат по степеням величины

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v.$$

Эти разложения употребляются иногда и теперь [Оппольцер, 1882; Дубяго, 1949].

Эйлер ставил задачу вычисления орбиты во всей общности, без каких-либо предположений относительно ее эксцентриситета. Эту новую и гораздо более трудную задачу он расчленяет на ряд вспомогательных, среди которых отметим две следующие.

Первую из них Эйлер формулирует так: «По двум данным радиусам-векторам, углу между ними и промежутку времени, в течение которого планета или комета этот угол описывает, найти параметр орбиты и, тем самым, всю орбиту. Угол предполагается небольшой.»

Полное решение этой основной задачи, полученное впоследствии Гауссом [1809], было дано выше (§§ 6, 7 гл. V). Эйлер нашел лишь приближенное решение, даваемое формулой

$$\sqrt{p} = \left(\frac{r_1 r_2}{\tau} + \frac{\tau}{6\sqrt{r_1 r_2}}\right) \sin(v_2 - v_1) \tag{2.1}$$

и достаточно точное лишь для небольших значений угла $v_2 - v_1$ между радиусами-векторами.

Вторая вспомогательная задача, решенная Эйлером также только приближенно, такова: «Даны два близкие положения планеты или кометы и соответствующий промежуток времени; требуется найти промежуточное положение для заданного момента времени». Здесь идет речь о получении зависимостей между координатами трех положений светила, движущегося по законам Кеплера (§ 2 гл. VIII). Эйлер подчеркивает, что найденное им решение тем ближе к истине, чем ближе промежуточный момент к середине между крайними. Полученные здесь Эйлером результаты явились одной из основ методов, данных позднее Ламбертом и Ольберсом.

Для решения завершающей задачи: «По немногим наблюдениям кометы найти ее истинную орбиту», Эйлер предлагает, взяв три близкие, по возможности равноотстоящие, наблюдения, найти орбиту, приняв некоторое правдоподобное значение геоцентрического расстояния. Это значение нужно затем варьировать до тех пор, пока орбита не будет представлять четвертое наблюдение. Это четвертое наблюдение Эйлер рекомендует взять возможно дальше от трех исходных. Если вместо четвертого наблюдения добиваться точного представления среднего наблюдения (два крайних, по которым вычисляются элементы орбиты, представляются всегда вполне точно), то получаем способ вычисления орбиты по трем наблюдениям, вполне удовлетворительный в тех пределах, в которых можно удовольствоваться точностью формулы (2.1).

Этим способом могла бы быть очень быстро получена вполне удовлетворительная орбита Цереры по ее первым наблюдениям в 1801 г., если бы работа Эйлера не была к этому времени совершенно забыта. Такая судьба метода Эйлера была, однако, вполне естественна, поскольку автор не придал этому методу удобную для применения форму, а его собственные попытки использовать метод для нахождения орбит комет 1680 и 1742 годов были мало удачны. Более того, сам Эйлер, вычисляя впоследствии орбиту кометы 1769 г., не воспользовался этим методом.

Выдающееся значение в развитии рассматриваемой нами области науки имели две работы Ж. Ламберта, опубликованные в 1761 и 1771 годах [Ламберт, 1902].

В противоположность Эйлеру, занимавшемуся только общим случаем вычисления орбиты, Ламберт начал с изучения более простой задачи нахождения параболической орбиты. Он поставил себе целью не столько дать вполне подготовленный для практического применения способ решения, сколько осветить теоретическую сторону этой задачи, используя возможно полнее свойства конических сечений. Наиболее важным результатом было открытие фундаментального значения теоремы Эйлера, как средства выражения параболичности орбиты.

Полученная Ламбертом чисто геометрическим путем формула для площади фокального сектора конического сечения позволила ему дать новое доказательство теоремы Эйлера и обобщить эту теорему на случай произвольного конического сечения *).

Работы Ламберта по-новому осветили также и общую задачу нахождения орбиты по трем наблюдениям. Он первый четко разделил эту задачу на две: на получение первого приближения и на переход от этого приближенного решения к точному. Из доказанных Ламбертом геометрических теорем о кривизне видимого пути светила вытекает алгебраическое уравнение, дающее приближенное значение геоцентрического расстояния в момент среднего наблюдения. Он выразил эту кривизну через кривизну земной орбиты и кривизну орбиты светила. Но кривизна орбиты зависит от радиуса-вектора. Таким образом, выведя кривизну видимого пути из наблюдений и зная радиус-вектор земной орбиты, можно получить уравнение, связывающее радиус-вектор и геоцентрическое расстояние светила в момент среднего наблюдения. Такое уравнение вскоре было действительно получено Лагранжем (§ 3), но другим, уже чисто аналитическим путем.

*) По поводу этой теоремы см. Крылов [1935]. (*Прим. ред.*)

Заметим, что геометрический метод Ламберта, облекавшего все свои результаты в форму теорем, не мог способствовать дальнейшему прогрессу в решении задачи. Настоящим продолжателем Эйлера, впервые использовавшим здесь мощные аналитические методы, прямо ведущие к цели, был Лагранж.

§ 3. Работа Лагранжа 1778 г.

Внимание Лагранжа было привлечено к проблеме нахождения орбит комет в 1777 г., когда Берлинская Академия наук, по инициативе входивших в ее состав Лагранжа и Ламберта, предложила эту проблему как тему на соискание премии. Ни одна из представленных на премию работ не содержала чего-либо нового, но уже в следующем году Лагранж опубликовал два весьма важных мемуара на эту тему, завершенных через пять лет третьим [Лагранж, 1778—1783]. В первом мемуаре он дал подробный разбор способов, предложенных Ньютоном, Эйлером и Ламбертом, во втором — изложил свой метод, дающий, по существу, полное решение задачи.

Воспроизведем основные этапы данного Лагранжем решения, заменив только его обозначения теми, которые употреблялись выше. Заметим, что Лагранж пользуется гелиоцентричесими эклиптическими координатами x_c, y_c, z_c. Но ничто не мешает нам считать эти координаты экваториальными.

Лагранж исходил из формул

$$x = P_x\xi + Q_x\eta; \quad y = P_y\xi + Q_y\eta; \quad z = P_z\xi + Q_z\eta, \tag{3.1}$$

выражающих гелиоцентрические координаты через орбитальные ξ, η.

Применив эти соотношения к трем моментам наблюдений t_1, t, t_2 и исключив направляющие косинусы, он получает соотношения

$$\left.\begin{aligned} Nx_1 - Mx + Lx_2 = 0, \\ Ny_1 - My + Ly_2 = 0, \\ Nz_1 - Mz + Lz_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

где

$$L = \xi\eta_1 - \xi_1\eta; \quad M = \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2; \quad N = \xi_2\eta - \xi\eta_2.$$

При помощи дифференциальных уравнений

$$\xi'' = -\xi r^{-3}; \quad \eta'' = -\eta r^{-3} \tag{3.3}$$

(штрихами обозначены производные по $\theta = kt$) Лагранж получает разложения

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 = \xi F_1 + \xi' G_1; \quad \xi_2 = \xi F_2 + \xi' G_2, \\ \eta_1 = \eta F_1 + \eta' G_1; \quad \eta_2 = \eta F_2 + \eta' G_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$