Заметим, что геометрический метод Ламберта, облекавшего все свои результаты в форму теорем, не мог способствовать дальнейшему прогрессу в решении задачи. Настоящим продолжателем Эйлера, впервые использовавшим здесь мощные аналитические методы, прямо ведущие к цели, был Лагранж.

§ 3. Работа Лагранжа 1778 г.

Внимание Лагранжа было привлечено к проблеме нахождения орбит комет в 1777 г., когда Берлинская Академия наук, по инициативе входивших в ее состав Лагранжа и Ламберта, предложила эту проблему как тему на соискание премии. Ни одна из представленных на премию работ не содержала чего-либо нового, но уже в следующем году Лагранж опубликовал два весьма важных мемуара на эту тему, завершенных через пять лет третьим [Лагранж, 1778—1783]. В первом мемуаре он дал подробный разбор способов, предложенных Ньютоном, Эйлером и Ламбертом, во втором — изложил свой метод, дающий, по существу, полное решение задачи.

Воспроизведем основные этапы данного Лагранжем решения, заменив только его обозначения теми, которые употреблялись выше. Заметим, что Лагранж пользуется гелиоцентричесими эклиптическими координатами x_c, y_c, z_c. Но ничто не мешает нам считать эти координаты экваториальными.

Лагранж исходил из формул

$$x = P_x\xi + Q_x\eta; \quad y = P_y\xi + Q_y\eta; \quad z = P_z\xi + Q_z\eta, \tag{3.1}$$

выражающих гелиоцентрические координаты через орбитальные ξ, η.

Применив эти соотношения к трем моментам наблюдений t_1, t, t_2 и исключив направляющие косинусы, он получает соотношения

$$\left.\begin{aligned} Nx_1 - Mx + Lx_2 &= 0, \\ Ny_1 - My + Ly_2 &= 0, \\ Nz_1 - Mz + Lz_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

где

$$L = \xi\eta_1 - \xi_1\eta; \quad M = \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2; \quad N = \xi_2\eta - \xi\eta_2.$$

При помощи дифференциальных уравнений

$$\xi'' = -\xi r^{-3}; \quad \eta'' = -\eta r^{-3} \tag{3.3}$$

(штрихами обозначены производные по $\theta = kt$) Лагранж получает разложения

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi F_1 + \xi' G_1; & \xi_2 &= \xi F_2 + \xi' G_2, \\ \eta_1 &= \eta F_1 + \eta' G_1; & \eta_2 &= \eta F_2 + \eta' G_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= 1 - \frac{1}{2} r^{-3}\tau_2^2 + \ldots; \quad G_1 = -\tau_2 + \frac{1}{6} r^{-3}\tau_2^3 + \ldots, \\ F_2 &= 1 - \frac{1}{2} r^{-3}\tau_1^2 + \ldots; \quad G_2 = +\tau_1 - \frac{1}{6} r^{-3}\tau_1^3 - \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

аналогичные использованным нами выше (§ 2 гл. VIII). Это ему дает (третьи степени интервалов времени он без всякой надобности отбрасывает)

$$n_1 = \frac{N}{M} = \frac{\tau_1}{\tau}\left(1 + \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right); \quad n_2 = \frac{L}{M} = \frac{\tau_2}{\tau}\left(1 + \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right). \qquad (3.6)$$

Эти выражения менее точны (при неравных интервалах времени), нежели употребленные нами в первом приближении выражения (§ 4 гл. VIII), которые можно представить так:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}\left[1 + \frac{\tau_1\tau_2}{6r^3}\left(\frac{\tau}{\tau_1} + 1\right)\right]; \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau}\left[1 + \frac{\tau_1\tau_2}{6r^3}\left(\frac{\tau}{\tau_2} + 1\right)\right]. \qquad (3.7)$$

Если здесь положить в членах второго порядка

$$\frac{\tau}{\tau_1} + 1 = \frac{\tau}{\tau_2} + 1 = 3,$$

то получим выражения (3.6).

После того как в соотношениях (3.2) гелиоцентрические координаты выражены через геоцентрические расстояния ρ_1, ρ, ρ_2 и величины ρ_1 и ρ_2 исключены, получается уравнение (§ 6 гл. VIII)

$$\rho = P - Qr^{-3}, \qquad (3.8)$$

служащее для нахождения ρ.

Стремясь упростить вычисление коэффициентов P и Q, Лагранж предлагает воспользоваться тем обстоятельством, что Земля движется вокруг Солнца приблизительно по законам Кеплера. Это позволяет (§ 8 гл. VIII) заменить уравнение (3.8) более простым, но менее точным уравнением

$$\rho = Q\left(R^{-3} - r^{-3}\right). \qquad (3.9)$$

Заметим, что это уравнение совпадает, по существу, с тем, которое можно было бы вывести из теоремы Ламберта о кривизне видимой орбиты (§ 2). Коэффициент Q приблизительно пропорционален этой кривизне.

Формулы (3.6) позволили Лагранжу решить задачу нахождения геоцентрических расстояний в первом приближении; иначе говоря, для бесконечно малых интервалов времени. Далее он указывает, что точное решение этой задачи, а следовательно, и вычисление орбиты, эквивалентно нахождению точных значений n_1 и n_2. Но этот последний вопрос он рассматривает в мемуаре 1778 г. только для случая параболической орбиты.

В предположении, что комета движется по параболе, Лагранж приводит вычисление n_1 и n_2 к нахождению отношения площади сектора к площади треугольника. Способ, который он дает для вычисления этого последнего отношения, идентичен со способом, предложенным Энке в 1833 г. и употребляемым в настоящее время (§ 8 гл. V).

§ 4. Метод Лагранжа 1783 г. и его дальнейшее развитие

Обратимся теперь к третьему мемуару, опубликованному Лагранжем в 1783 г. Здесь он ставит себе целью, по его собственным словам, не столько дать новое решение «кометной проблемы», сколько упростить и обобщить решение, изложенное во втором мемуаре 1778 г.

Вместо того, чтобы выражать координаты x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 для двух крайних моментов через r, r', ... формулами (3.1) и (3.4), на этот раз он употребляет использованные нами выше (§ 2, гл. VIII) выражения

$$x_1 = xF_1 + x'G_1; \quad x_2 = xF_2 + x'G_2; \ \ldots, \tag{4.1}$$

где коэффициенты даются теми же самыми формулами (3.5).

Он показывает, далее, что все производные r, входящие в формулы (3.5), можно выразить через r, r' и r''.

В самом деле, равенство

$$rr' = xx' + yy' + zz'$$

дает

$$(rr')' = xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Отсюда, пользуясь уравнениями движения и интегралом энергии, получаем

$$(rr')' = r^{-1} - a^{-1}.$$

Дифференцирование этого равенства дает для радиуса-вектора уравнение третьего порядка

$$(rr')'' = -r^{-2}r',$$

не содержащее a; отсюда и вытекает справедливость высказанного утверждения.

За основные величины, через которые выражаются все производные r, Лагранж принимает

$$p = r^{-1}r'; \quad q = r^{-2}(rr')'.$$