ний n_1 и n_2. Но этот последний вопрос он рассматривает в мемуаре 1778 г. только для случая параболической орбиты.

В предположении, что комета движется по параболе, Лагранж приводит вычисление n_1 и n_2 к нахождению отношения площади сектора к площади треугольника. Способ, который он дает для вычисления этого последнего отношения, идентичен со способом, предложенным Энке в 1833 г. и употребляемым в настоящее время (§ 8 гл. V).

§ 4. Метод Лагранжа 1783 г. и его дальнейшее развитие

Обратимся теперь к третьему мемуару, опубликованному Лагранжем в 1783 г. Здесь он ставит себе целью, по его собственным словам, не столько дать новое решение «кометной проблемы», сколько упростить и обобщить решение, изложенное во втором мемуаре 1778 г.

Вместо того, чтобы выражать координаты x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 для двух крайних моментов через r, r', ... формулами (3.1) и (3.4), на этот раз он употребляет использованные нами выше (§ 2, гл. VIII) выражения

$$x_1 = xF_1 + x'G_1; \quad x_2 = xF_2 + x'G_2; \; \ldots, \tag{4.1}$$

где коэффициенты даются теми же самыми формулами (3.5).

Он показывает, далее, что все производные r, входящие в формулы (3.5), можно выразить через r, r' и r''.

В самом деле, равенство

$$rr' = xx' + yy' + zz'$$

дает

$$(rr')' = xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Отсюда, пользуясь уравнениями движения и интегралом энергии, получаем

$$(rr')' = r^{-1} - a^{-1}.$$

Дифференцирование этого равенства дает для радиуса-вектора уравнение третьего порядка

$$(rr')'' = -r^{-2}r',$$

не содержащее a; отсюда и вытекает справедливость высказанного утверждения.

За основные величины, через которые выражаются все производные r, Лагранж принимает

$$p = r^{-1}r'; \quad q = r^{-2}(rr')'.$$

Это дает

$$\left.\begin{aligned}F_1 &= 1 - \frac{1}{2} r^{-3}\tau_2^2 - \frac{1}{2} r^{-3} p\tau_2^3 + \frac{1}{8} r^{-3}\left(q - 5p^2 + \frac{1}{3} r^{-3}\right)\tau_2^4 + \\ &\qquad + \frac{1}{8} r^{-3}(3pq + pr^{-3} - 7p^3)\tau_2^5 - \ldots, \\ G_1 &= -\tau_2 + \frac{1}{6} r^{-3}\tau_2^3 + \frac{1}{4} r^{-3} p\tau_2^4 - \\ &\qquad - \frac{1}{8} r^{-3}\left(\frac{3}{5} q - 3p^2 + \frac{1}{15} r^{-3}\right)\tau_2^5 - \ldots\end{aligned}\right\} \quad (4.2)$$

Выражения для F_2, G_2 получаются заменой здесь τ_2 через $-\tau_1$.

Получение точных значений n_1 и n_2, выражающихся (§ 2, гл. VIII) через F_1, G_1, F_2, G_2, приводится, таким образом, к нахождению r, p и q. Для этих величин Лагранж дает уравнения, достаточно удобно решаемые последовательными приближениями.

Мемуар заканчивается выводом формул для вычисления элементов. Для нахождения a, e и истинной аномалии v Лагранж предлагает пользоваться формулами

$$a^{-1} = r^{-1} - r^2 q; \qquad a(1-e^2) = r + r^4(q - p^2),$$
$$e \cos v = r^3(q - p^2).$$

Две последние формулы можно заменить формулами (2.5) главы V, одинаково удобными при всех значениях эксцентриситета.

Таков метод, предложенный Лагранжем для нахождения орбиты по трем наблюдениям. В теоретическом отношении он решает задачу не менее полно, нежели метод, разработанный Гауссом в связи с открытием Цереры, и так широко применявшийся в течение всего XIX в. Но Лагранж, никогда не вычисливший ни одного примера, не довел свой метод до формы, непосредственно пригодной для вычислителя — практика, как это сделал с таким искусством Гаусс, в результате чего метод Лагранжа, хотя и изложенный еще раз в 1787 г. в его знаменитой «Аналитической механике», надолго остался вне поля зрения астрономов.

Только через 100 лет И. А. Востоков [1888], по-видимому впервые, обратил внимание на достоинства этого метода. Он придал ему форму, удобную для вычисления и показал примерами, что он не уступает по своей эффективности методу Гаусса. Но работа Востокова не привлекла внимания и метод Лагранжа не употреблялся до 1911 г., когда Шарлье вновь указал на его полную практическую пригодность. Это привело к появлению нескольких вариантов метода Лагранжа, среди которых наиболее интересными и наиболее разработанными являются метод Мультона [1914] и метод Вилькенса [1919], изложенный также Штракке [1929].

В этих методах полностью сохраняются основные идеи метода Лагранжа: промежуточными неизвестными, служащими потом для вычисления элементов, являются гелиоцентрические координаты x, y, z и их производные x', y', z'; последовательные приближения осуществляются при помощи вычисления дополнительных членов в разложениях вида (4.2).

Особого упоминания заслуживает метод, предложенный Андуайе в 1918 г. [Андуайе, 1918 и 1923; Субботин, 1941]. Этот метод, так же как и метод Востокова, отличается от только что указанных тем, что последовательные приближения проводятся не при помощи рядов, а при помощи замкнутых выражений, как это имеет место в методе Гаусса. Методы Востокова и Андуайе занимают, таким образом, промежуточное положение между методом, данным Лагранжем в 1783 г., и методом Гаусса (§ 5), или методом, изложенным в гл. VIII (история которого будет дана в § 7).

§ 5. Работа Дю-Сежура. Метод Ольберса

Начиная свой третий мемуар, рассмотренный в предыдущем параграфе, Лагранж отмечает, что его исследования по этому предмету, опубликованные в 1778 г., явились причиной появления работ Дю-Сежура и Лапласа, представленных Парижской Академии наук соответственно в 1779 и 1780 годах.

Принципиально новый метод решения проблемы нахождения орбит, предложенный Лапласом, мы рассмотрим дальше (§ 11), а сейчас обратимся к мемуару Дю-Сежура, непосредственно примыкающему к работам Лагранжа. В этом мемуаре излагается два различных метода вычисления параболической орбиты.

Сущность первого метода заключается в следующем. Если из уравнений (3.2) гл. VIII, выражающих условие нахождения трех гелиоцентрических положений кометы в плоскости, проходящей через Солнце, исключить n_1 и n_2, то получим уравнение вида

$$D\rho\rho_1\rho_2 + \mathscr{E}\rho_1\rho_2 + \mathscr{E}_1\rho\rho_1 + \mathscr{E}_2\rho\rho_2 + \\ + F\rho + F_1\rho_1 + F_2\rho_2 + G = 0. \qquad (5.1)$$

К этому уравнению, коэффициенты которого могут быть вычислены со всею точностью, допускаемою точностью наблюдений, Дю-Сежур присоединяет приближенные уравнения

$$\rho_1 = M_1\rho; \quad \rho_2 = M_2\rho. \qquad (5.2)$$