интересными и наиболее разработанными являются метод Мультона [1914] и метод Вилькенса [1919], изложенный также Штракке [1929].

В этих методах полностью сохраняются основные идеи метода Лагранжа: промежуточными неизвестными, служащими потом для вычисления элементов, являются гелиоцентрические координаты x, y, z и их производные x', y', z'; последовательные приближения осуществляются при помощи вычисления дополнительных членов в разложениях вида (4.2).

Особого упоминания заслуживает метод, предложенный Андуайе в 1918 г. [Андуайе, 1918 и 1923; Субботин, 1941]. Этот метод, так же как и метод Востокова, отличается от только что указанных тем, что последовательные приближения проводятся не при помощи рядов, а при помощи замкнутых выражений, как это имеет место в методе Гаусса. Методы Востокова и Андуайе занимают, таким образом, промежуточное положение между методом, данным Лагранжем в 1783 г., и методом Гаусса (§ 5), или методом, изложенным в гл. VIII (история которого будет дана в § 7).

§ 5. Работа Дю-Сежура. Метод Ольберса

Начиная свой третий мемуар, рассмотренный в предыдущем параграфе, Лагранж отмечает, что его исследования по этому предмету, опубликованные в 1778 г., явились причиной появления работ Дю-Сежура и Лапласа, представленных Парижской Академии наук соответственно в 1779 и 1780 годах.

Принципиально новый метод решения проблемы нахождения орбит, предложенный Лапласом, мы рассмотрим дальше (§ 11), а сейчас обратимся к мемуару Дю-Сежура, непосредственно примыкающему к работам Лагранжа. В этом мемуаре излагается два различных метода вычисления параболической орбиты.

Сущность первого метода заключается в следующем. Если из уравнений (3.2) гл. VIII, выражающих условие нахождения трех гелиоцентрических положений кометы в плоскости, проходящей через Солнце, исключить n_1 и n_2, то получим уравнение вида

$$D\rho\rho_1\rho_2 + \mathcal{E}\rho_1\rho_2 + \mathcal{E}_1\rho\rho_1 + \mathcal{E}_2\rho\rho_2 + \\ + F\rho + F_1\rho_1 + F_2\rho_2 + G = 0. \qquad (5.1)$$

К этому уравнению, коэффициенты которого могут быть вычислены со всею точностью, допускаемою точностью наблюдений, Дю-Сежур присоединяет приближенные уравнения

$$\rho_1 = M_1\rho; \quad \rho_2 = M_2\rho. \qquad (5.2)$$

Так как в уравнении (5.1) можно принять $G=0$ (ср. § 8 гл. VIII), то задача вычисления геоцентрических расстояний оказывается приведенной к решению уравнения вида

$$S_0\rho^2+S_1\rho+S_2=0. \tag{5.3}$$

Но легко видеть, что при небольших интервалах времени между наблюдениями коэффициенты уравнения (5.3) имеют очень небольшое число значащих цифр. Этот метод мог давать, таким образом, удовлетворительные результаты лишь в тех случаях, когда коэффициенты M_1 и M_2 уравнений (5.2) удавалось находить (при помощи дополнительных наблюдений) с высокой точностью. Для вычисления орбиты только по трем наблюдениям такой метод совершенно не пригоден. Причиной этого в конечном счете является то, что в уравнении (5.1), на котором он базируется, недостаточно используются свойства силы, производящей движение: это уравнение имеет место для любой центральной силы.

В конце своего мемуара Дю-Сежур указал другой метод, предназначенный уже не для решения задачи в общем виде, а для вычисления только параболических орбит. В то время как его первый метод представляет сейчас лишь исторический интерес, этот метод дал практически полное решение задачи вычисления параболической орбиты, сохранившее все свое значение и до настоящего времени. Тем более представляется удивительным, что сам Дю-Сежур, так гордившийся своим первым методом, не уделил второму методу должного внимания. Все многочисленные кометные орбиты, вычисленные как в рассматриваемом мемуаре, так и в последующих работах Дю-Сежура, были получены при помощи первого метода, ценою огромных вычислений. В результате этого второй метод был совершенно забыт и лишь спустя 17 лет вновь найден Ольберсом, притом в менее совершенном виде.

Второй метод Дю-Сежура заключается в совместном решении уравнения

$$\rho_2=M\rho_1, \tag{5.4}$$

связывающего геоцентрические расстояния в моменты двух крайних наблюдений, и уравнения Эйлера, которому он придал (в наших обозначениях) вид

$$s^2=\frac{4k^2(t_2-t_1)^2}{r_1+r_2}\zeta^2, \tag{5.5}$$

где в первом приближении можно положить $\zeta=1$, а r_1, r_2 и s легко выражаются через ρ_1 и ρ_2 (§ 2, гл. IX).

Соотношением вида (5.4) пользовались еще Ньютон и Ламберт. Дю-Сежур получил его как следствие уравнений Лагранжа (3.2), чем была вскрыта истинная природа этого соотношения, затемнявшаяся ранее сложными геометрическими выводами.

В 1797 г. Вильгельм Ольберс напечатал свое ставшее знаменитым «Сочинение о простейшем и удобнейшем методе вычисления орбиты кометы» [Ольберс, 1864]. Оно начинается подробным разбором всех способов нахождения параболической орбиты, предложенных до Лагранжа, а также первого метода Дю-Сежура. Работы Лагранжа и Лапласа здесь только упомянуты, а второй метод Дю-Сежура не упомянут вовсе. После этого Ольберс переходит к изложению своего метода и пояснению его тщательно проделанным во всех деталях вычислением орбиты кометы 1769 г.

Метод Ольберса является, по существу, не чем иным, как методом Ламберта, представленным в аналитической форме и тщательно приспособленным к нуждам астронома-вычислителя. Заслуга Ольберса была в том, что он впервые подошел к проблеме вычисления орбит не как к задаче абстрактно-математической с абсолютно точными исходными данными, а как к задаче чисто практической, требующей тщательного учета реальной точности этих данных.

Это обстоятельство больше всего способствовало тому, что его сочинение сразу сделалось настольной книгой астрономов и так тщательно изучалось в течение всего XIX в.

От второго метода Дю-Сежура метод Ольберса отличается в двух отношениях. Во-первых, вместо простого аналитического вывода уравнения (5.4) мы находим у Ольберса снова геометрический вывод, закрывающий возможность уточнения этого уравнения последовательными приближениями. Во-вторых, вместо формы (5.5) уравнения Эйлера Ольберс употребляет это уравнение в его первоначальной форме

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2}, \tag{5.6}$$

что ведет в случае малых промежутков времени к такой потере точности, которая не является неизбежной.

Все эти недостатки первоначальной формы метода Ольберса были впоследствии исправлены. Замена уравнения (5.6) соотношением (5.5) была сделана Энке [1831]. Таким образом, «метод Ольберса» уже стал вполне идентичен с совершенно забытым методом Дю-Сежура.

Выявление роли Дю-Сежура является заслугой киевского астронома В. И. Фабрициуса (1845—1895), внесшего здесь полную ясность [Фабрициус, 1883]. Другим киевским астрономом, Р. Ф. Фогелем (1859—1920), была выяснена идентичность сущности первоначальной формы метода Ольберса с методом Ламберта [Фогель, 1894].

Работа Фогеля вызвала попытку заменить название «метод Ольберса» на «метод Ламберта — Ольберса» [Баушингер, 1928]. Однако, как мы только что видели, для такой замены нет достаточных оснований. Название «метод Ольберса» является, конечно, условным, но оно напоминает о том, что Ольберс первый ясно понял все значение этого метода, как кратчайшего и удобнейшего пути для нахождения приближенной параболической орбиты. И Ламберт и Дю-Сежур были далеки от такого понимания.

Значительным улучшением метода, приведением к его современной форме, был переход от сферических эклиптических координат к прямоугольным экваториальным координатам, позволивший заменить тригонометрические формулы гораздо более удобными (особенно при машинном вычислении) алгебраическими. Этот переход совершился одновременно и в решении общей задачи вычисления орбит (§ 7).

§ 6. Метод Гаусса

Появление метода Гаусса для решения общей задачи вычисления орбиты по трем наблюдениям, тесно связанное с открытием малых планет, представляет один из наиболее эффектных и наиболее известных эпизодов в истории астрономии. Напоминать его здесь нет надобности. Но для нас важно отметить, что создание и разработка этого метода происходили в условиях, глубоко отличных от того, что имело место в других случаях. Ведь Гаусс создавал и усовершенствовал свой метод в неразрывной связи с попытками дать орбиты первых четырех малых планет — Цереры, Паллады, Юноны и Весты (открытых соответственно в 1801, 1802, 1804 и 1807 гг.). Его метод принимал поэтому свою окончательную форму лишь по мере того, как каждый этап испытывался на практике.

Только после такой многолетней работы Гаусс опубликовал свое знаменитое сочинение «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям» [Гаусс, 1809], с таким нетерпением ожидавшееся его современниками.

Сочинение Гаусса, как бы уже заранее апробированное теми успешными предвычислениями эфемерид малых планет, которое он опубликовал в течение ряда лет, было встречено с восторгом и сразу стало настольной книгой астрономов. Оно оставалось таковой многие десятилетия. Даже в начале XX в. в некоторых университетах тщательное изучение трактата Гаусса еще считалось необходимым при подготовке специалиста в области теоретической астрономии.

Помимо заслуг Гаусса в решении общей задачи вычисления орбиты по трем наблюдениям (вычисление параболической ор-