Работа Фогеля вызвала попытку заменить название «метод Ольберса» на «метод Ламберта — Ольберса» [Баушингер, 1928]. Однако, как мы только что видели, для такой замены нет достаточных оснований. Название «метод Ольберса» является, конечно, условным, но оно напоминает о том, что Ольберс первый ясно понял все значение этого метода, как кратчайшего и удобнейшего пути для нахождения приближенной параболической орбиты. И Ламберт и Дю-Сежур были далеки от такого понимания.

Значительным улучшением метода, приведением к его современной форме, был переход от сферических эклиптических координат к прямоугольным экваториальным координатам, позволивший заменить тригонометрические формулы гораздо более удобными (особенно при машинном вычислении) алгебраическими. Этот переход совершился одновременно и в решении общей задачи вычисления орбит (§ 7).

§ 6. Метод Гаусса

Появление метода Гаусса для решения общей задачи вычисления орбиты по трем наблюдениям, тесно связанное с открытием малых планет, представляет один из наиболее эффектных и наиболее известных эпизодов в истории астрономии. Напоминать его здесь нет надобности. Но для нас важно отметить, что создание и разработка этого метода происходили в условиях, глубоко отличных от того, что имело место в других случаях. Ведь Гаусс создавал и усовершенствовал свой метод в неразрывной связи с попытками дать орбиты первых четырех малых планет — Цереры, Паллады, Юноны и Весты (открытых соответственно в 1801, 1802, 1804 и 1807 гг.). Его метод принимал поэтому свою окончательную форму лишь по мере того, как каждый этап испытывался на практике.

Только после такой многолетней работы Гаусс опубликовал свое знаменитое сочинение «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям» [Гаусс, 1809], с таким нетерпением ожидавшееся его современниками.

Сочинение Гаусса, как бы уже заранее апробированное теми успешными предвычислениями эфемерид малых планет, которое он опубликовал в течение ряда лет, было встречено с восторгом и сразу стало настольной книгой астрономов. Оно оставалось таковой многие десятилетия. Даже в начале XX в. в некоторых университетах тщательное изучение трактата Гаусса еще считалось необходимым при подготовке специалиста в области теоретической астрономии.

Помимо заслуг Гаусса в решении общей задачи вычисления орбиты по трем наблюдениям (вычисление параболической орбиты он не рассматривает, отсылая читателя к сочинению Ольберса), два обстоятельства явились причиной исключительного авторитета его трактата. Гаусс впервые так подробно и так тщательно рассмотрел все вопросы, связанные с невозмущенным движением светил, что отпадала надобность пользоваться какими-либо другими сочинениями. С другой стороны, его книга явилась первым (и на многие десятилетия единственным) руководством по тому, что теперь получило название вычислительной техники. Здесь было подробно рассмотрено влияние ошибок исходных данных на результат, сравнительная точность различных формул, служащих для вычисления одной и той же величины, и другие аналогичные вопросы. Более того, для решения многих задач Гаусс дает не только формулы, но и тщательно продуманные вычислительные схемы. Не преувеличивая, можно сказать, что именно благодаря книге Гаусса искусство вычислять впервые получило широкое распространение.

Излагая свой метод вычисления орбит, Гаусс нигде не указывает, что здесь было сделано его предшественниками. Это привело к распространению, даже среди специалистов, не говоря уже о широких кругах астрономов, взгляда на метод, излагаемый в Theoria motus, как на создание одного Гаусса, а на работы его предшественников — как на мало успешные попытки решить задачу, столь блестяще решенную Гауссом. Однако такое представление совершенно не соответствует действительности.

Оно возникло потому, что работы Лагранжа не были достаточно известны астрономам и имели чуждый для них характер. А с другой стороны, метод Гаусса по своей внешней форме глубоко отличался от метода Лагранжа.

Но если обратиться к существу дела, то легко видеть, какая тесная связь существует между этими методами. Лагранж получает свое основное уравнение, имеющее в наших обозначениях вид

$$D\rho = U - n_1 U_1 - n_2 U_2, \tag{6.1}$$

в чисто алгебраической форме, поскольку он пользуется прямоугольными координатами и направляющими косинусами. Гаусс получает эту основную зависимость между геоцентрическим расстоянием ρ и отношениями n_1 и n_2 площадей треугольников в тригонометрической форме. В соответствии с привычками астрономов того времени, он пользуется полярными эклиптическими координатами и находит уравнение, эквивалентное (6.1), при помощи геометрических построений и сферической тригонометрии, совершенно не пользуясь методами аналитической геометрии.

С другой стороны, за основные неизвестные Лагранж принимает, как мы видели выше, отношения n_1 и n_2, тогда как Гаусс вводит вместо них величины

$$P = n_2/n_1; \qquad Q = 2r^3(n_1 + n_2 - 1). \tag{6.2}$$

В первом приближении Гаусс берет

$$P = \tau_2/\tau_1; \qquad Q = \tau_1\tau_2,$$

иначе говоря, он здесь пользуется теми же значениями (3.6) отношений площадей треугольников, как и Лагранж. Таким образом, первое приближение в способе Гаусса, по существу, идентично с первым приближением в способе Лагранжа, а потому дает такую же точность.

Отметим, что с чисто практической точки зрения можно считать, что хорошее первое приближение уже решает задачу, ибо переход от него к точной орбите легко может быть осуществлен способом вариации геоцентрических расстояний, или способом дифференциального исправления элементов. Оба эти способа широко использовались еще Эйлером.

Таким образом, когда были открыты первые малые планеты, способ Лагранжа мог полностью обеспечить упешное вычисление их орбит. Но работы Лагранжа — «геометра», как тогда называли математиков, — были слишком далеки даже по своему внешнему виду от того, к чему привыкли астрономы. В них решение задачи не доводилось до вычислительных рецептов, поясненных примерами. Неудивительно поэтому, что эти работы остались вне поля зрения астрономов.

Но если в отношении первого приближения было достаточно придать уже существующему решению удобный для вычислений и соответствующий привычкам астрономов вид, то в отношении точного решения задачи Гаусс пошел совершенно иным путем, нежели Лагранж.

Для получения во втором и следующих приближениях более точных значений n_1 и n_2 Лагранж предлагал пользоваться бесконечными рядами (4.2). Гаусс дал для этого гораздо более совершенный и в теоретическом и в практическом отношении способ. Этот способ, основанный на замечательном методе нахождения отношения площади сектора к площади треугольника (§ 7 гл. V), был изложен выше (§ 6 гл. VIII).

Способ Лагранжа основан на использовании столь общего приема, как разложения в степенные ряды. Так как эти ряды здесь весьма сложны, то судить о числе членов, которые нужно принять во внимание, можно только по их убыванию. С каждым новым приближением быстро возрастает не только число членов, подлежащих вычислению, но и их сложность. Напротив, способ Гаусса является превосходным примером искуснейшего использования специфических свойств эллиптического движения. В нем вычисление ведется по замкнутым формулам и притом, что особенно важно в практическом отношении, по одним и тем же во всех приближениях. Употребление все время одних и тех же формул не только существенно облегчает вычисление, но и делает его гораздо более надежным, предохраняя от ошибок.

Указанная выше идентичность сущности первого приближения в способах Гаусса и Лагранжа была ясно понята еще В. И. Фабрициусом [1887], но стала более широко известной лишь в начале XX в., когда пробудился интерес к работам Лагранжа, остававшимся так долго забытыми (§ 4).

§ 7. Дальнейшее развитие метода Гаусса

После вычисления орбит четырех первых малых планет, выполненного самим Гауссом, метод Гаусса долго не имел новых применений, поскольку пятая малая планета (Астреа) была открыта лишь в 1845 г. Последовавшие затем все более и более многочисленные открытия малых планет дали много новых и разнообразных случаев для практического испытания этого метода. И уже очень скоро не без удивления заметили, что в метод, который все привыкли считать вершиной совершенства, могут быть внесены полезные изменения.

Энке [1852], отметив, что «математическое изящество, достигнутое Гауссом путем применения геометрических способов, несколько затрудняет употребление метода на практике», дал значительно более прямой вывод основных уравнений. Этот вывод, приближающийся к выводу, данному Лагранжем, освободил метод от излишних промежуточных величин, что способствовало и большей ясности изложения и удобству применения. Среди других улучшений, введенных Энке, особенно следует отметить замену формул (3.6) для отношений площадей треугольников, которые Гаусс без изменения взял у Лагранжа, формулами (3.7). Такая замена, не усложняя заметно вычислений, делает первое приближение более точным, что иногда чувствительно сокращает работу, так как уменьшает число приближений.

Предложенная Энке форма метода сразу вошла во всеобщее употребление. На Берлинской обсерватории, сделавшейся во время директорства Энке главным центром по вычислению орбит и эфемерид малых планет, метод получил некоторые дальнейшие улучшения, опубликованные Титьеном [1877]. В такой именно форме метод Гаусса вошел в широко распространенные монографии и применялся при логарифмическом вычислении до недавнего времени. Можно отметить, что в этой окончательной форме метода Гаусса за основные неизвестные принимаются не величины (6.2), введенные Гауссом, а отношения n_1 и n_2 площадей треугольников, чем делается еще один шаг назад к методу Лагранжа.