особенно важно в практическом отношении, по одним и тем же во всех приближениях. Употребление все время одних и тех же формул не только существенно облегчает вычисление, но и делает его гораздо более надежным, предохраняя от ошибок.

Указанная выше идентичность сущности первого приближения в способах Гаусса и Лагранжа была ясно понята еще В. И. Фабрициусом [1887], но стала более широко известной лишь в начале XX в., когда пробудился интерес к работам Лагранжа, остававшимся так долго забытыми (§ 4).

## § 7. Дальнейшее развитие метода Гаусса

После вычисления орбит четырех первых малых планет, выполненного самим Гауссом, метод Гаусса долго не имел новых применений, поскольку пятая малая планета (Астреа) была открыта лишь в 1845 г. Последовавшие затем все более и более многочисленные открытия малых планет дали много новых и разнообразных случаев для практического испытания этого метода. И уже очень скоро не без удивления заметили, что в метод, который все привыкли считать вершиной совершенства, могут быть внесены полезные изменения.

Энке [1852], отметив, что «математическое изящество, достигнутое Гауссом путем применения геометрических способов, несколько затрудняет употребление метода на практике», дал значительно более прямой вывод основных уравнений. Этот вывод, приближающийся к выводу, данному Лагранжем, освободил метод от излишних промежуточных величин, что способствовало и большей ясности изложения и удобству применения. Среди других улучшений, введенных Энке, особенно следует отметить замену формул (3.6) для отношений площадей треугольников, которые Гаусс без изменения взял у Лагранжа, формулами (3.7). Такая замена, не усложняя заметно вычислений, делает первое приближение более точным, что иногда чувствительно сокращает работу, так как уменьшает число приближений.

Предложенная Энке форма метода сразу вошла во всеобщее употребление. На Берлинской обсерватории, сделавшейся во время директорства Энке главным центром по вычислению орбит и эфемерид малых планет, метод получил некоторые дальнейшие улучшения, опубликованные Титьеном [1877]. В такой именно форме метод Гаусса вошел в широко распространенные монографии и применялся при логарифмическом вычислении до недавнего времени. Можно отметить, что в этой окончательной форме метода Гаусса за основные неизвестные принимаются не величины (6.2), введенные Гауссом, а отношения $n_1$ и $n_2$ площадей треугольников, чем делается еще один шаг назад к методу Лагранжа.

Освобождение от ненужного усложнения, вызываемого введением величин (6.2), было еще раньше Титьена осуществлено Клинкерфюсом [1871]. В его замечательной во многих отношениях книге было сделано еще одно важное нововведение — переход от эклиптических координат к экваториальным.

Выгода употребления при вычислении орбиты экваториальной координатной системы стала вполне реальной благодаря тому, что начиная с 1835 г. Берлинский астрономический ежегодник, ради удобства вычисления эфемерид малых планет и комет, стал давать прямоугольные экваториальные координаты Солнца. Однако традиция пользоваться исключительно эклиптическими координатами была окончательно преодолена лишь в двадцатых и тридцатых годах нашего века под влиянием широкого распространения арифмометров. Хотя применение экваториальных координат имеет несомненные преимущества и при логарифмическом вычислении, как это справедливо отмечал Клинкерфюс, а еще раньше (1862) Гюльден, но решающее значение здесь имело стремление максимально использовать возможности арифмометрического вычисления.

Введение прямоугольных экваториальных координат вместо полярных эклиптических окончательно привело к замене сложных тригонометрических формул, ведущих свое начало от Гаусса, теми простыми алгебраическими формулами, которыми пользовался Лагранж. В то время как у Лагранжа основные уравнения (3.2) являются следствием уравнений (3.1), дающих параметрическое представление плоскости, проходящей через начало координат, у Гаусса соответствующие уравнения получаются как следствие тригонометрических тождеств

$$\sin(C-B)\left.\frac{\sin}{\cos}\right\}A-\sin(C-A)\left.\frac{\sin}{\cos}\right\}B+\sin(B-A)\left.\frac{\sin}{\cos}\right\}C=0$$

и выражений координат планеты через элементы (§ 5 гл. IV).

Таким образом, в результате всех этих улучшений рассматриваемый метод стал в отношении основных формул (связывающих геоцентрические расстояния светила с отношениями $n_1$ и $n_2$ площадей треугольников) и всего первого приближения тождественным с методом Лагранжа (§ 4). Что же касается второго и дальнейших приближений, то здесь полностью сохранился созданный Гауссом способ, основанный на вычислении отношений площадей секторов к площадям треугольников (§ 6 гл. VIII). Только для второго приближения этот способ может быть с выгодою заменен применением формул Гиббса (§ 7 гл. VIII).

Все это показывает, что метод вычисления орбит по трем наблюдениям, изложенный в гл. VIII и являющийся в настоящее время наиболее употребительным, по всей справедливости может быть назван методом Лагранжа — Гаусса.

Из дальнейших улучшений *), касающихся уже лишь деталей, нужно упомянуть предложенный Мертоном [1925] способ для вычисления элементов орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и параметру (§ 3 гл. V). При арифмометрическом вычислении этот способ несколько удобнее употреблявшегося раньше (§ 4, гл. V).

Что касается внешней стороны метода Лагранжа — Гаусса, следует отметить еще одну попытку несколько сократить вычисления. Было предложено находить из основных уравнений непосредственно гелиоцентрические координаты, нужные для вычисления элементов орбиты, вместо того, чтобы пользоваться геоцентрическими расстояниями как промежуточными неизвестными.

Если, например, за основные неизвестные принять координаты $x_1$, $x$, $x_2$, то после исключения из соотношений

$$x = \lambda\rho - X; \quad y = \mu\rho - Y; \quad z = \nu\rho - Z; \ \ldots \tag{7.1}$$

геоцентрических расстояний получим

$$\left.\begin{aligned} y &= px - a; & y_1 &= p_1x_1 - a_1; & y_2 &= p_2x_2 - a_2, \\ z &= qx - b; & z_1 &= q_1x_1 - b_1; & z_2 &= q_2x_2 - b_2, \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

где коэффициенты даются формулами вида

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{tg}\alpha; & a &= Y - pX, \\ q &= \sec\alpha\operatorname{tg}\delta; & b &= Z - qX, \ \ldots \end{aligned}$$

Подстановка выражений (7.2) в основные уравнения (3.2), написанные в их обычной форме, дает

$$\left.\begin{aligned} &n_1x_1 - x + n_2x_2 = 0, \\ &p_1n_1x_1 - px + p_2n_2x_2 = n_1a_1 - a + n_2a_2, \\ &q_1n_1x_1 - qx + q_2n_2x_2 = n_1b_1 - b + n_2b_2. \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Отсюда, исключая $x_1$, $x_2$ и пользуясь приближенными выражениями для $n_1$ и $n_2$, получим уравнение

$$x = A + Br^{-3}. \tag{7.4}$$

Присоединив к нему соотношение

$$r^2 = Cx^2 - 2Dx + \mathscr{E}, \tag{7.5}$$

легко выводимое из (7.1), будем иметь возможность найти $x$ и $r$.

После того как решена система (7.4), (7.5), заменяющая здесь уравнения Лагранжа, соотношения (7.3) дадут $x_1$, $x_2$, а формулы (7.2) — все остальные координаты.

*) Упрощающие модификации различных методов определения орбит дают Тиссеран [1899] и Калландро [1902]. (*Прим. ред.*)

Конечно, соотношения (7.2) и (7.3) несколько проще, нежели употребляемые в обычной форме метода Лагранжа — Гаусса. Но, с другой стороны, коэффициенты уравнения (7.5) сложнее, и нужна еще дополнительная работа для нахождения геоцентрических расстояний, необходимых для вычисления поправок за аберрационное время. Принимая во внимание еще и потерю симметрии, приходится признать, что указанный путь едва ли имеет заметные преимущества перед общепринятым, по крайней мере, если число приближений (как это почти всегда бывает на практике) не превышает двух.

Идея сократить вычисления путем употребления гелиоцентрических координат в качестве основных неизвестных была использована в методе Вилькенса [1919], с большой обстоятельностью изложенном Штракке [1929]. Сопоставление формул для такой модификации метода Лагранжа — Гаусса впервые дал Стойко [1933].

Метод, названный нами методом Лагранжа—Гаусса, является наиболее прямым развитием идей этих ученых. Но на почве этих же идей было создано еще несколько методов. Методы Фабрициуса и Харцера будут подробно изложены в двух следующих параграфах. Здесь мы укажем сущность некоторых методов, хотя и не вошедших в практику, но представляющих теоретический интерес.

Оппольцер [1870, 1882] предложил увеличить точность первого приближения путем замены формул (3.7) для $n_1$ и $n_2$, введенных в употребление Энке, более точными формулами, выражающими эти величины через радиусы-векторы $r_1$ и $r_2$ (§ 3 гл. IX). В развитом им методе вместо двух уравнений Лагранжа приходится решать систему четырех уравнений с неизвестными $\rho_1$, $\rho_2$, $r_1$, $r_2$. Достигаемый этим путем выигрыш в точности не компенсирует, однако, значительного усложнения вычислений, даже в тех случаях, когда метод Оппольцера позволяет ограничиться только одним приближением.

То же самое можно сказать и о методе Гиббса [1888], в котором для нахождения геоцентрических расстояний применяются данные Гиббсом формулы для $n_1$ и $n_2$ (§ 7 гл. VIII). Здесь приходится решать еще более сложную систему уравнений. Другим недостатком этого метода является невозможность исправления полученных значений геоцентрических расстояний последовательными приближениями, если точность формул Гиббса окажется недостаточной.

Эти недостатки были в известной степени устранены в работах В. И. Фабрициуса [1891; 1893], Р. Ф. Фогеля [1891; 1892] и Фришауфа [1905], но и в такой улучшенной форме метод не получил распространения.

Сравнение всех этих методов дает Харцер [1901]. Его весьма обстоятельная работа содержит и некоторые другие варианты, а также изучение вопроса о влиянии ошибок наблюдений на точность получаемых геоцентрических расстояний. Интересные соображения о сравнительных достоинствах различных методов содержат также работы Кона [1918] и Стойко [1931 a; 1931 b].

## § 8. Метод Фабрициуса

Наиболее существенной особенностью метода Гаусса, по сравнению с методом Лагранжа, было приведение задачи к решению системы двух уравнений вида

$$P = F_1(P, Q), \qquad Q = F_2(P, Q), \tag{8.1}$$

правые части которых вычисляются по замкнутым формулам. Лагранж, как мы видели, употреблял для нахождения эквивалентных величин $n_1$ и $n_2$ бесконечные ряды.

Когда в 1877 г. Титьен улучшил метод Гаусса введением величин $n_1$ и $n_2$ вместо $P$ и $Q$, задача была приведена, по существу, к решению системы уравнений вида

$$n_1 = f_1(n_1, n_2), \quad n_2 = f_2(n_1, n_2), \tag{8.2}$$

правые части которых имеют замкнутые выражения.

Это обстоятельство было особенно отчетливо выявлено в интересной модификации метода Гаусса, предложенной в том же году В. И. Фабрициусом [1877]. Метод Фабрициуса был изложен в хорошо известном трактате Баушингера [1906 и 1928], но, повидимому, на практике не применялся.

Дадим рабочие формулы этого, во многих отношениях интересного метода, не останавливаясь на подробностях их вывода.

Основу метода составляет решение уравнений (8.2), которые можно написать, удерживая все прежние обозначения, так:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}\frac{\eta}{\eta_1}; \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau}\frac{\eta}{\eta_2}. \tag{8.3}$$

Чтобы решить эти уравнения способом итераций или какимлибо иным, нужно иметь возможность вычислять их правые части для выбранных значений $n_1$, $n_2$. Для этого можно воспользоваться следующими формулами.

Прежде всего, выведенные в гл. VIII уравнения (3.5), (3.7) и одно из уравнений (3.2) дают формулы вида

$$\left.\begin{aligned} \rho &= a + a_1 n_1 + a_2 n_2, \\ n_1\rho_1 &= a' + a_1' n_1 + a_2' n_2 + b'\rho, \\ n_2\rho_2 &= a'' + a_1'' n_1 + a_2'' n_2 + b''\rho + b_1''\rho_1, \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$