Сравнение всех этих методов дает Харцер [1901]. Его весьма обстоятельная работа содержит и некоторые другие варианты, а также изучение вопроса о влиянии ошибок наблюдений на точность получаемых геоцентрических расстояний. Интересные соображения о сравнительных достоинствах различных методов содержат также работы Кона [1918] и Стойко [1931 a; 1931 b].

## § 8. Метод Фабрициуса

Наиболее существенной особенностью метода Гаусса, по сравнению с методом Лагранжа, было приведение задачи к решению системы двух уравнений вида

$$P=F_1(P,\ Q),\qquad Q=F_2(P,\ Q), \tag{8.1}$$

правые части которых вычисляются по замкнутым формулам. Лагранж, как мы видели, употреблял для нахождения эквивалентных величин $n_1$ и $n_2$ бесконечные ряды.

Когда в 1877 г. Титьен улучшил метод Гаусса введением величин $n_1$ и $n_2$ вместо $P$ и $Q$, задача была приведена, по существу, к решению системы уравнений вида

$$n_1=f_1(n_1,\ n_2),\qquad n_2=f_2(n_1,\ n_2), \tag{8.2}$$

правые части которых имеют замкнутые выражения.

Это обстоятельство было особенно отчетливо выявлено в интересной модификации метода Гаусса, предложенной в том же году В. И. Фабрициусом [1877]. Метод Фабрициуса был изложен в хорошо известном трактате Баушингера [1906 и 1928], но, по-видимому, на практике не применялся.

Дадим рабочие формулы этого, во многих отношениях интересного метода, не останавливаясь на подробностях их вывода.

Основу метода составляет решение уравнений (8.2), которые можно написать, удерживая все прежние обозначения, так:

$$n_1=\frac{\tau_1}{\tau}\frac{\eta}{\eta_1};\qquad n_2=\frac{\tau_2}{\tau}\frac{\eta}{\eta_2}. \tag{8.3}$$

Чтобы решить эти уравнения способом итераций или каким-либо иным, нужно иметь возможность вычислять их правые части для выбранных значений $n_1$, $n_2$. Для этого можно воспользоваться следующими формулами.

Прежде всего, выведенные в гл. VIII уравнения (3.5), (3.7) и одно из уравнений (3.2) дают формулы вида

$$\left.\begin{aligned} \rho&=a+a_1n_1+a_2n_2,\\ n_1\rho_1&=a'+a_1'n_1+a_2'n_2+b'\rho,\\ n_2\rho_2&=a''+a_1''n_1+a_2''n_2+b''\rho+b_1''\rho_1, \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

позволяющие находить значения $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, соответствующие принятым значениям $n_1$ и $n_2$.

После этого по формулам

$$x=\lambda\rho-X; \qquad y=\mu\rho-Y; \qquad z=\nu\rho-Z$$

и им аналогичным вычисляются гелиоцентрические координаты светила в моменты $t$, $t_1$ и $t_2$, что дает соответствующие радиусы-векторы $r$, $r_1$, $r_2$.

Далее, следуя пути, указанному в § 9, гл. VIII, мы можем сразу найти величины $\eta$, $\eta_1$, $\eta_2$. Таким образом, заканчивается вычисление тех значений правых частей уравнений (8.3), которые соответствуют исходным значениям $n_1$ и $n_2$.

Фабрициус показал, что можно избегнуть вычисления величины $\eta$, поступая следующим образом.

После того как найдены $r$, $r_1$, $r_2$, $\eta_1$ и $\eta_2$, вычисляем вспомогательные величины

$$2\sigma=n_1r_1+r+n_2r_2,$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_1}{\tau_1}+\frac{\eta_2}{\tau_2}\right)\sqrt{2\sigma(\sigma-n_1r_1)(\sigma-n_2r_2)}, \tag{8.5}$$

$$N=A\mp\sqrt{A^2-2A}.$$

Здесь верхний или нижний знак берется в зависимости от того, меньше или больше 180° гелиоцентрическая дуга, пройденная светилом за время от $t_1$ до $t_2$.

При помощи величины $N$ уравнения (8.3) могут быть представлены в форме

$$n_1=\frac{N}{\tau_1\eta_2+\tau_2\eta_1}\tau_1\eta_2; \qquad n_2=\frac{N}{\tau_1\eta_2+\tau_2\eta_1}\tau_2\eta_1, \tag{8.6}$$

уже не содержащей $\eta$.

Чтобы получить для решения этих уравнений исходные значения $n_1$ и $n_2$, Фабрициус предлагает следующий способ.

Первое из уравнений (8.4) можно написать так:

$$\rho=a+\frac{1}{2}(a_1+a_2)(n_1+n_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)(n_1-n_2), \tag{8.7}$$

где разность $a_1-a_2$ есть, как легко видеть, величина первого порядка малости.

Выведенные нами формулы (§ 2, гл. VIII) дают, если ограничиться членами третьего порядка,

$$n_1+n_2=1+\frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}-\frac{r'}{2r^4}\tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2)+\ldots, \tag{8.8}$$

$$n_1-n_2=\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau}\left[1+\frac{\tau_1\tau_2}{6r^3}-\frac{r'}{2r^4}\tau\tau_1\tau_2+\ldots\right]. \tag{8.9}$$

Выражение (8.9) подставим в (8.7). Отбросив получившиеся при этом члены третьего порядка, будем иметь

$$\rho = a + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau} + a_m(n_1 + n_2), \tag{8.10}$$

где

$$a_m = \frac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

Формулы (8.6) показывают, что $n_1 + n_2 = N$. Поэтому после подстановки выражения (8.10) в соотношение

$$r^2 = (\rho + C)^2 + R^2 - C^2,$$

получим следующую зависимость между величинами $r$ и $N$:

$$r^2 = (K + a_m N)^2 + S^2, \tag{8.11}$$

где

$$K = C + a + \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\tau}(a_1 - a_2); \quad S^2 = R^2 - C^2.$$

Решение этого уравнения совместно с уравнением

$$N = 1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3}, \tag{8.12}$$

вытекающим из (8.8), даст величины $r$ и $N$, после чего формулы

$$\eta_1 = 1 + \frac{\tau_1^2}{6r^3}; \qquad \eta_2 = 1 + \frac{\tau_2^2}{6r^3}, \tag{8.13}$$

и (8.6) позволят вычислить $n_1$ и $n_2$ с такою же точностью.

Решение системы уравнений (8.11) и (8.12) заменяет здесь решение уравнений Лагранжа.

В последующих приближениях решать эту систему уже не нужно. Благодаря этому обстоятельству метод Фабрициуса может иметь некоторые преимущества перед методом Лагранжа — Гаусса. Эти преимущества, однако, не велики, так как повторное решение уравнений Лагранжа в быстро сходящихся приближениях представляет собой очень небольшую добавочную работу.

## § 9. Метод Харцера

Среди методов вычисления орбит, примыкающих к основным идеям Лагранжа и Гаусса, метод Харцера [1913 и 1918] отличается тем, что в нем первым этапом является нахождение круговой орбиты, по возможности хорошо представляющей все три наблюдения.

К первому из уравнений (8.4), т. е.

$$\rho = a + a_1 n_1 + a_2 n_2, \tag{9.1}$$