Выражение (8.9) подставим в (8.7). Отбросив получившиеся при этом члены третьего порядка, будем иметь

$$\rho = a + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau} + a_m(n_1 + n_2), \tag{8.10}$$

где

$$a_m = \frac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

Формулы (8.6) показывают, что $n_1 + n_2 = N$. Поэтому после подстановки выражения (8.10) в соотношение

$$r^2 = (\rho + C)^2 + R^2 - C^2,$$

получим следующую зависимость между величинами r и N:

$$r^2 = (K + a_m N)^2 + S^2, \tag{8.11}$$

где

$$K = C + a + \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\tau}(a_1 - a_2); \quad S^2 = R^2 - C^2.$$

Решение этого уравнения совместно с уравнением

$$N = 1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3}, \tag{8.12}$$

вытекающим из (8.8), даст величины r и N, после чего формулы

$$\eta_1 = 1 + \frac{\tau_1^2}{6r^3}; \qquad \eta_2 = 1 + \frac{\tau_2^2}{6r^3}, \tag{8.13}$$

и (8.6) позволят вычислить n_1 и n_2 с такою же точностью.

Решение системы уравнений (8.11) и (8.12) заменяет здесь решение уравнений Лагранжа.

В последующих приближениях решать эту систему уже не нужно. Благодаря этому обстоятельству метод Фабрициуса может иметь некоторые преимущества перед методом Лагранжа — Гаусса. Эти преимущества, однако, не велики, так как повторное решение уравнений Лагранжа в быстро сходящихся приближениях представляет собой очень небольшую добавочную работу.

§ 9. Метод Харцера

Среди методов вычисления орбит, примыкающих к основным идеям Лагранжа и Гаусса, метод Харцера [1913 и 1918] отличается тем, что в нем первым этапом является нахождение круговой орбиты, по возможности хорошо представляющей все три наблюдения.

К первому из уравнений (8.4), т. е.

$$\rho = a + a_1 n_1 + a_2 n_2, \tag{9.1}$$

где (§ 3 гл. VIII)

$$a = D^{-1}U; \quad a_1 = -D^{-1}U_1; \quad a_2 = -D^{-1}U_2,$$

присоединим соотношение

$$r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2, \tag{9.2}$$

дающее

$$\rho = -C + \sqrt{r^2 - S^2},$$

где

$$C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z) = R\cos\psi,$$
$$S^2 = R^2 - C^2 = R^2 \sin^2\psi.$$

После исключения ρ получим уравнение

$$F(r) = 0, \tag{9.3}$$

где

$$F(r) = C + a - \sqrt{r^2 - S^2} + a_1 n_1 + a_2 n_2.$$

Решение этого уравнения выполняется сначала в предположении, что орбита круговая, так что $r_1 = r_2 = r$.

Для круговой орбиты отношения площадей секторов к площадям соответствующих треугольников, входящие в формулы Гаусса

$$n_1 = n_1^0 \eta/\eta_1; \qquad n_2 = n_2^0 \eta/\eta_2, \tag{9.4}$$

выражаются, как нетрудно видеть, следующим образом:

$$\eta = \frac{w}{\sin w}; \qquad \eta_1 = \frac{w_1}{\sin w_1}; \qquad \eta_2 = \frac{w_2}{\sin w_2}, \tag{9.5}$$

причем

$$w = \tau r^{-3/2}; \quad w_1 = \tau_1 r^{-3/2}; \quad w_2 = \tau_2 r^{-3/2}. \tag{9.6}$$

Решение уравнения (9.3) с этими значениями n_1 и n_2 легко выполняется любым интерполяционным методом. За исходное значение можно взять $r = 2{,}0$ или 2,5.

С полученными в процессе решения значениями n_1 и n_2, соответствующими корню уравнения (9.3), вычисляются ρ_1 и ρ_2, для чего служат обычные формулы (3.2) гл. VIII.

Затем по формулам, аналогичным (9.2), находятся r_1 и r_2.

Для вычисления более точных значений n_1 и n_2 Харцер предлагает пользоваться формулами (9.4) и (9.5), но на этот раз брать

$$\left.\begin{aligned} w &= \tau\left[\frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{\tau}{5\tau_1\tau_2} u_0\right]^{1/2}, \\ w_1 &= \tau_1\left[\frac{1}{2}(u + u_2) - \frac{\tau_1}{5\tau\tau_2} u_0\right]^{1/2}, \\ w_2 &= \tau_2\left[\frac{1}{2}(u + u_1) - \frac{\tau_2}{5\tau\tau_1} u_0\right]^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

где

$$u = r^{-3};\quad u_1 = r_1^{-3};\quad u_2 = r_2^{-3},$$

$$u_0 = \tau_1 u_1 - \tau u + \tau_2 u_2.$$

Харцер показал, что приближенные формулы (9.5), (9.7) для отношений η, η_1, η_2 дают всю нужную на практике точность, если эксцентриситет малой планеты невелик, а промежуток времени $t_2 - t_1$ не превосходит 2—3 месяцев.

Применение формул (9.5) существенно облегчается таблицами функции $(\sin x)/x$ или $x/\sin x$. Таблицы Хайаши [1930] дают первую из этих функций с восемью десятичными знаками для $x=0(0{,}01)\,10(0{,}1)\,20(1)\,100$. Таблицы Рейнолдса [1957] дают ее с девятью знаками для $x=0(0{,}001)\,49{,}999$.

Если точность, даваемая выражениями (9.7), при дальнейших приближениях окажется недостаточной, то величины η, η_1, η_2 можно вычислить по обычным формулам (§ 9 гл. VIII).

Для приближенного вычисления отношений η, η_1, η_2 при помощи выражений (9.5) можно вместо формул Харцера (9.7) взять более простые:

$$w = \tau (r_1 r_2)^{-3/4};\quad w_1 = \tau_1 (r r_2)^{-3/4};\quad w_2 = \tau_2 (r r_1)^{-3/4}, \tag{9.8}$$

указанные Г. М. Баженовым [1947; 1949]. Но область их применимости значительно меньше. При эксцентриситете $e=0{,}3$ формулы Харцера дают шестизначную точность, если гелиоцентрическая дуга не превосходит 25°, тогда как формулы (9.5) и (9.8) дают такую же точность только для дуги, не превосходящей 4°,2.

§ 10. Практическая эффективность рассмотренных методов

Мы уже видели, какой исключительный авторитет сразу приобрела Theoria motus Гаусса. Следствием этого явилась не только недооценка заслуг его предшественников, но и преувеличенное представление о возможностях данного им метода. Метод Гаусса стал часто рассматриваться как полное, вполне универсальное решение задачи нахождения орбиты по трем наблюдениям.

В самом деле, единственное ограничение общности этого метода, ясно указанное самим Гауссом (и присущее всем предлагавшимся ранее методам), заключалось в достаточной малости интервалов времени между наблюдениями. Но такое ограничение не может считаться сколько-нибудь существенным, поскольку все методы нахождения орбиты по трем наблюдениям нужны только для вычисления предварительной орбиты. Поэтому в реально встречающихся на практике случаях их приходится применять лишь к близким между собою наблюдениям.