где

$$u = r^{-3}; \quad u_1 = r_1^{-3}; \quad u_2 = r_2^{-3},$$

$$u_0 = \tau_1 u_1 - \tau u + \tau_2 u_2.$$

Харцер показал, что приближенные формулы (9.5), (9.7) для отношений η, η_1, η_2 дают всю нужную на практике точность, если эксцентриситет малой планеты невелик, а промежуток времени t_2—t_1 не превосходит 2—3 месяцев.

Применение формул (9.5) существенно облегчается таблицами функции $(\sin x)/x$ или $x/\sin x$. Таблицы Хайаши [1930] дают первую из этих функций с восемью десятичными знаками для $x=0(0{,}01)\ 10(0{,}1)\ 20(1)\ 100$. Таблицы Рейнолдса [1957] дают ее с девятью знаками для $x=0(0{,}001)\ 49{,}999$.

Если точность, даваемая выражениями (9.7), при дальнейших приближениях окажется недостаточной, то величины η, η_1, η_2 можно вычислить по обычным формулам (§ 9 гл. VIII).

Для приближенного вычисления отношений η, η_1, η_2 при помощи выражений (9.5) можно вместо формул Харцера (9.7) взять более простые:

$$w = \tau\,(r_1 r_2)^{-3/4}; \quad w_1 = \tau_1\,(r r_2)^{-3/4}; \quad w_2 = \tau_2\,(r r_1)^{-3/4}, \qquad (9.8)$$

указанные Г. М. Баженовым [1947; 1949]. Но область их применимости значительно меньше. При эксцентриситете $e=0{,}3$ формулы Харцера дают шестизначную точность, если гелиоцентрическая дуга не превосходит 25°, тогда как формулы (9.5) и (9.8) дают такую же точность только для дуги, не превосходящей 4°,2.

§ 10. Практическая эффективность рассмотренных методов

Мы уже видели, какой исключительный авторитет сразу приобрела Theoria motus Гаусса. Следствием этого явилась не только недооценка заслуг его предшественников, но и преувеличенное представление о возможностях данного им метода. Метод Гаусса стал часто рассматриваться как полное, вполне универсальное решение задачи нахождения орбиты по трем наблюдениям.

В самом деле, единственное ограничение общности этого метода, ясно указанное самим Гауссом (и присущее всем предлагавшимся ранее методам), заключалось в достаточной малости интервалов времени между наблюдениями. Но такое ограничение не может считаться сколько-нибудь существенным, поскольку все методы нахождения орбиты по трем наблюдениям нужны только для вычисления предварительной орбиты. Поэтому в реально встречающихся на практике случаях их приходится применять лишь к близким между собою наблюдениям.

Но является ли метод Гаусса вполне общим в пределах этого вытекающего из существа дела ограничения? Какие интервалы времени здесь надо считать достаточно малыми? Эти вопросы долго оставались без сколько-нибудь обоснованного теоретически ответа, хотя эмпирически было найдено, что для малых планет интервал в несколько десятков дней является вполне допустимым, тогда как для комет метод Гаусса очень редко дает удовлетворительные результаты, даже при самых малых интервалах времени.

Говоря об эффективности метода нахождения орбиты, необходимо различать два совершенно разных вопроса — эффективность первого приближения и удобство перехода от первого приближения к точному решению задачи.

Глубокий анализ метода Гаусса мы находим впервые в замечательной во многих отношениях работе В. И. Фабрициуса [1887]. Здесь были указаны случаи, когда получение первого приближения при помощи способа, общего методам Лагранжа и Гаусса, становится или совсем невозможным или крайне ненадежным. Фабрициус пришел к заключению, что на метод Гаусса «надо смотреть как на частный прием, дающий надежные результаты только для той группы небесных тел (малых планет), открытие которых служило поводом для появления в свет Theoria motus». Еще бо́льшую ясность внесла здесь работа Мультона [1914], в которой первое приближение было исследовано в его лагранжевой, чисто алгебраической форме. Таким образом, было установлено, что успех первого приближения в методе Лагранжа — Гаусса связан прежде всего с достаточной малостью гелиоцентрического движения светила. Но, с другой стороны, это движение не должно быть столь мало́, чтобы неизбежные ошибки наблюдений могли существенно исказить кривизну видимой траектории светила. Другое условие, весьма способствующее успеху первого приближения, заключается в существенном превышении радиусов-векторов светила в моменты наблюдений радиусов-векторов Земли.

Что касается второй части задачи — перехода от первого приближения к точной орбите, то путь, указанный Гауссом, обеспечивает здесь всегда полную эффективность решения. После всех улучшений, внесенных в способ Гаусса, этот путь заключается, как мы видели, в решении системы уравнений вида

$$n_1 = f_1(n_1,\ n_2); \quad n_2 = f_2(n_1, n_2), \tag{10.1}$$

правые части которых вычисляются в каждом приближении при помощи одних и тех же замкнутых формул.

Вычисление правых частей уравнений (10.1) может быть выполнено как по улучшенным формулам Гаусса (§ 9, гл. VIII), так и по формулам Фабрициуса (§ 8). В большинстве случаев приближенные формулы Харцера (§ 9) также дают всю нужную на практике точность и могут служить для сокращения вычислений.

Нередко под методом Гаусса разумеют не только применение указанных им формул к вычислению правых частей уравнений (10.1), но и решение этих уравнений методом итерации. Это неверно с исторической точки зрения, поскольку сам Гаусс указывал на целесообразность решения соответствующих уравнений (8.1) интерполяционными методами в тех случаях, когда последовательные итерации сходятся недостаточно быстро.

Но и по существу дела, включение того или иного частного способа решения уравнений как неотъемлемой принадлежности определенного метода нахождения орбит является нецелесообразным. Задачей такого метода является составление уравнений, а выбор наиболее эффективного способа их решения — это уже вопрос вычислительной математики.

Все это показывает, что исследование сходимости итерационного процесса для уравнений (10.1) не представляет практического интереса. Помимо работ, уже указанных выше (§ 6, гл. VIII), условия этой сходимости рассматривались еще в работах Буцериуса [1950—1953], представившего правые части уравнений (10.1) в интегральной форме. Применение общей теории интегральных уравнений позволило Буцериусу получить новый алгоритм для нахождения n_1 и n_2, не претендующий, впрочем, на практические преимущества по сравнению с указанными выше [Штумпф, 1959]. Этим путем Буцериус получил следующее достаточное условие: сходимость итерационного процесса имеет место, если интервал времени между крайними наблюдениями (выраженный в сутках) удовлетворяет неравенству

$$t_2 - t_1 \leqslant 179\, h^{3/2},$$

где через h обозначена длина перпендикуляра, опущенного из Солнца на хорду, соединяющую положения светила в моменты t_1 и t_2.

Все сказанное здесь относительно получения точного решения по методу Гаусса относится, конечно, и к процессу получения точного решения по методам Фабрициуса и Харцера.

§ 11. Метод Лапласа

Внимание Лапласа к задаче нахождения орбит комет было привлечено, как он сам отмечает, работами Лагранжа и Дю-Сежура, опубликованными в 1778 и 1779 гг. Но развитый им метод [Лаплас, 1780] строится совсем на другом основании. В то время как все его предшественники решали задачу при помощи свойств движения, выражаемых первыми интегралами, Лаплас