приближенные формулы Харцера (§ 9) также дают всю нужную на практике точность и могут служить для сокращения вычислений.

Нередко под методом Гаусса разумеют не только применение указанных им формул к вычислению правых частей уравнений (10.1), но и решение этих уравнений методом итерации. Это неверно с исторической точки зрения, поскольку сам Гаусс указывал на целесообразность решения соответствующих уравнений (8.1) интерполяционными методами в тех случаях, когда последовательные итерации сходятся недостаточно быстро.

Но и по существу дела, включение того или иного частного способа решения уравнений как неотъемлемой принадлежности определенного метода нахождения орбит является нецелесообразным. Задачей такого метода является составление уравнений, а выбор наиболее эффективного способа их решения — это уже вопрос вычислительной математики.

Все это показывает, что исследование сходимости итерационного процесса для уравнений (10.1) не представляет практического интереса. Помимо работ, уже указанных выше (§ 6, гл. VIII), условия этой сходимости рассматривались еще в работах Буцериуса [1950—1953], представившего правые части уравнений (10.1) в интегральной форме. Применение общей теории интегральных уравнений позволило Буцериусу получить новый алгоритм для нахождения n_1 и n_2, не претендующий, впрочем, на практические преимущества по сравнению с указанными выше [Штумпф, 1959]. Этим путем Буцериус получил следующее достаточное условие: сходимость итерационного процесса имеет место, если интервал времени между крайними наблюдениями (выраженный в сутках) удовлетворяет неравенству

$$t_2 - t_1 \leqslant 179\, h^{3/2},$$

где через h обозначена длина перпендикуляра, опущенного из Солнца на хорду, соединяющую положения светила в моменты t_1 и t_2.

Все сказанное здесь относительно получения точного решения по методу Гаусса относится, конечно, и к процессу получения точного решения по методам Фабрициуса и Харцера.

§ 11. Метод Лапласа

Внимание Лапласа к задаче нахождения орбит комет было привлечено, как он сам отмечает, работами Лагранжа и Дю-Сежура, опубликованными в 1778 и 1779 гг. Но развитый им метод [Лаплас, 1780] строится совсем на другом основании. В то время как все его предшественники решали задачу при помощи свойств движения, выражаемых первыми интегралами, Лаплас исходит непосредственно из дифференциальных уравнений движения. Поэтому метод Лапласа и все его модификации называют иногда **прямыми методами вычисления орбит**.

Возможность прямого использования дифференциальных уравнений движения для нахождения гелиоцентрических координат светила была указана еще Ньютоном (§ 1). Но намеченный им план решения задачи не является, как показал Лаплас, вполне правильным.

Сущность метода Лапласа может быть представлена следующим образом.

Основные соотношения между геоцентрическими и гелиоцентрическими координатами

$$\lambda\rho = x + X; \quad \mu\rho = y + Y; \quad \nu\rho = z + Z, \tag{11.1}$$

будучи дважды продифференцированы по переменному $\theta = kt$, дают

$$\lambda''\rho + 2\lambda'\rho' + \lambda\rho'' = x'' + X''; \ \ldots$$

Если отсюда исключить x'', ... при помощи уравнений движения

$$x'' = -xr^{-3}; \ \ldots \tag{11.2}$$

и присоединить вытекающую из (11.1) зависимость между ρ и r, то получим следующую основную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \lambda''\rho + 2\lambda'\rho' + \lambda\rho'' &= (X - \lambda\rho)r^{-3} + X'', \\ \mu''\rho + 2\mu'\rho' + \mu\rho'' &= (Y - \mu\rho)r^{-3} + Y'', \\ \nu''\rho + 2\nu'\rho' + \nu\rho'' &= (Z - \nu\rho)r^{-3} + Z'', \\ r^2 &= \rho^2 + 2C\rho + R^2. \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

Величины λ, λ', λ'', μ, ..., ν'' могут быть найдены из наблюдений, а X'', Y'', Z'' — из теории движения Земли. Поэтому уравнения (11.3) позволяют найти r, ρ и ρ'. Вычислив затем при помощи соотношений (11.1) и вытекающих из них равенств

$$\lambda'\rho + \lambda\rho' = x' + X', \ \ldots \tag{11.4}$$

координаты x, y, z и их производные x', y', z' для рассматриваемого момента времени, мы получим возможность легко найти элементы орбиты.

Если в соотношениях (11.1), а следовательно, и вытекающих из них (11.3) и (11.4), координаты $\lambda\rho$, ..., X, ... считать геоцентрическими, то производные X', X'', ... легко могут быть получены со всей нужной точностью из данных ежегодника.

Задача приводится, таким образом, к нахождению из наблюдений девяти величин λ, μ, ν, λ', ..., λ'', ..., соответствующих некоторому моменту θ. Это можно сделать, используя полученные из наблюдений геоцентрические направляющие косинусы λ_h, μ_h, ν_h для трех и более моментов θ_h ($h=0, 1, 2, \ldots$).

Такая возможность получать исходные величины при помощи произвольно большого числа наблюдений, ослабляя тем самым влияние их случайных ошибок, рассматривалась как особое преимущество метода Лапласа. Однако это преимущество не имеет в действительности практического значения. Целесообразнее вычислить сначала орбиту по трем наблюдениям, а затем улучшать ее при помощи остальных. Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением случая, когда используются три наблюдения,— единственного, представляющего практический интерес.

Пусть для функции $f(\theta)$ известны частные значения $f_1=f(\theta_1)$, $f_0=f(\theta_0)$, $f_2=f(\theta_2)$, причем $\theta_1<\theta_0<\theta_2$.

Значение этой функции и ее производных для аргумента θ, близкого к θ_0, удобно находить по формуле

$$f(\theta)=f_0+(\theta-\theta_0)[f_0f_1]+(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_1)[f_0f_1f_2], \tag{11.5}$$

где

$$[f_0f_1]=\frac{f_1-f_0}{\theta_1-\theta_0}; \quad [f_1f_2]=\frac{f_2-f_1}{\theta_2-\theta_1}; \quad [f_0f_1f_2]=\frac{[f_1f_2]-[f_0f_1]}{\theta_2-\theta_0}.$$

В частности, полагая $\theta=\theta_0$, будем иметь

$$f'(\theta_0)=\frac{\tau_1^2(f_0-f_1)+\tau_2^2(f_2-f_0)}{\tau\tau_1\tau_2}; \quad \frac{1}{2}f''(\theta_0)=\frac{\tau_1f_1-\tau f_0+\tau_2f_2}{\tau\tau_1\tau_2}, \tag{11.6}$$

где, как обычно,

$$\tau=\theta_2-\theta_1; \quad \tau_1=\theta_2-\theta_0; \quad \tau_2=\theta_0-\theta_1.$$

Вычислив по этим формулам производные λ', λ'', ... для момента среднего наблюдения, мы будем иметь все, что нужно для решения уравнений (11.3) и вычисления элементов орбиты. Полученная орбита будет совершенно точно представлять, вообще говоря, только среднее наблюдение. На представлении крайних наблюдений скажутся ошибки, делаемые нами при употреблении приближенной формулы (11.5). Переход от приближенной орбиты, даваемой решением системы (11.3), к орбите, точно представляющей все три наблюдения, уже выходит за рамки метода Лапласа. Такой переход может быть выполнен или способом Гаусса, или любым способом дифференциального исправления полученной орбиты. Некоторые специальные методы, предложенные для этой цели, будут рассмотрены в следующих параграфах.

Заметим, что Лаплас предложил для вычисления вторых производных X'', ... пользоваться соотношениями

$$X''=-XR^{-3}; \ \ldots, \tag{11.7}$$

аналогичными (11.2). Этим путем несколько сокращаются вычисления, но без всякой необходимости теряется точность и создаются дополнительные трудности с учетом барицентрического параллакса, поскольку уравнения (11.7) имеют место не для геоцентрических координат, а для таких, начало которых находится в барицентре системы Земля — Луна. Необходимый здесь учет барицентрического параллакса (так же как и топоцентрического) может быть строго выполнен лишь в процессе последовательных приближений, когда уже получены достаточно точные значения геоцентрических расстояний. Если же не прибегать к помощи уравнений (11.7), то учет параллаксов, как увидим ниже (§ 15), может быть существенно упрощен.

Пуанкаре [1906] указал, как можно в случае неравноотстоящих наблюдений повысить точность метода Лапласа без заметного усложнения вычислений. Для этого нужно только за момент, к которому относятся основные уравнения (11.3), взять не момент t_0 среднего наблюдения, а момент

$$t=\frac{1}{3}(t_1+t_0+t_2), \tag{11.8}$$

являющийся средним арифметическим из моментов наблюдений.

В самом деле, главную часть ошибки интерполяционной формулы (11.5) составляет член третьей степени, который, очевидно, равен $\frac{1}{6}f'''(\theta_0)\,\Pi$, где для краткости положено

$$\Pi=(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2).$$

Таким образом, ошибки значений $f'(\theta)$ и $f''(\theta)$, вычисленных по формуле (11.5), можно считать равными приблизительно $\frac{1}{6}f'''(\theta_0)\,\Pi'$ и $\frac{1}{6}f'''(\theta_0)\,\Pi''$. Но в интересующем нас случае, когда момент θ не выходит за пределы интервала, охватываемого наблюдениями, Π' есть величина второго порядка, а Π'' — первого, причем

$$\Pi'=2(3\theta-\theta_0-\theta_1-\theta_2).$$

Если же формулу (11.5) применить не к моменту t_0, а к моменту (11.8), то это вызовет дополнительные (зависящие от интерполирования) ошибки третьего порядка в величинах λ, μ, ν, но зато в λ'', μ'', ν'' мы будем иметь ошибки не первого порядка, а второго, поскольку в этом случае Π'' обращается в нуль. Первые производные λ', μ', ν' будут получаться в обоих случаях с ошибками второго порядка. Значение ρ, получаемое при решении системы (11.3), будет в этом случае на один порядок точнее (в общем случае неравноотстоящих наблюдений), нежели в первоначальной форме метода Лапласа.

Из уравнений (11.3) исключим ρ' и ρ''. Полагая

$$\left.\begin{aligned} &A=\mu\nu'-\nu\mu'; \quad B=\nu\lambda'-\lambda\nu'; \quad C=\lambda\mu'-\mu\lambda',\\ &E=A\lambda''+B\mu''+C\nu'',\\ &V=AX+BY+CZ,\\ &V''=AX''+BY''+CZ'',\\ &P=V''E^{-1}; \quad Q=-VE^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{11.9}$$

получим

$$\rho=P-Qr^{-3}; \qquad r^2=\rho^2+2C\rho+R^2. \tag{11.10}$$

Здесь непосредственно видно влияние ошибок исходных данных на точность получаемых значений ρ и r.

Примечание. Направляющие косинусы и их производные должны удовлетворять соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1; \ \lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'=0,\\ &\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2+\lambda\lambda''+\mu\mu''+\nu\nu''=0. \end{aligned}\right\} \tag{11.11}$$

Для вычисления производных направляющих косинусов можно пользоваться формулами

$$\left.\begin{aligned} &\lambda'=-\alpha'\cos\delta\sin\alpha-\delta'\sin\delta\cos\alpha,\\ &\mu'=\alpha'\cos\delta\cos\alpha-\delta'\sin\delta\sin\alpha,\\ &\nu'=\delta'\cos\delta,\\ &\lambda''=-\alpha''\cos\delta\sin\alpha-\delta''\sin\delta\cos\alpha+2\alpha'\delta'\sin\delta\sin\alpha-\\ &\qquad\qquad-(\alpha'^2+\delta'^2)\cos\delta\cos\alpha,\\ &\mu''=\alpha''\cos\delta\cos\alpha-\delta''\sin\delta\sin\alpha-2\alpha'\delta'\sin\delta\cos\alpha-\\ &\qquad\qquad-(\alpha'^2+\delta'^2)\cos\delta\sin\alpha,\\ &\nu''=\delta''\cos\delta-\delta'^2\sin\delta. \end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

В этом случае формулу (11.6) придется применять для вычисления производных только двух величин α и δ. Конечно, этот способ неприменим, если видимый путь светила проходит вблизи полюса экватора.

§ 12. Точность метода Лапласа

Для сравнения точности, даваемой методом Лапласа, с тем, что дают рассмотренные раньше методы, проще всего преобразовать метод Лапласа так, чтобы он давал непосредственно геоцентрические расстояния в моменты наблюдения.