Из уравнений (11.3) исключим ρ' и ρ''. Полагая

$$\left.\begin{aligned} &A=\mu\nu'-\nu\mu'; \quad B=\nu\lambda'-\lambda\nu'; \quad C=\lambda\mu'-\mu\lambda',\\ &E=A\lambda''+B\mu''+C\nu'',\\ &V=AX+BY+CZ,\\ &V''=AX''+BY''+CZ'',\\ &P=V''E^{-1}; \quad Q=-VE^{-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.9)$$

получим

$$\rho=P-Qr^{-3}; \qquad r^2=\rho^2+2C\rho+R^2. \qquad (11.10)$$

Здесь непосредственно видно влияние ошибок исходных данных на точность получаемых значений ρ и r.

Примечание. Направляющие косинусы и их производные должны удовлетворять соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1; \ \lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'=0,\\ &\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2+\lambda\lambda''+\mu\mu''+\nu\nu''=0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.11)$$

Для вычисления производных направляющих косинусов можно пользоваться формулами

$$\left.\begin{aligned} &\lambda'=-\alpha'\cos\delta\sin\alpha-\delta'\sin\delta\cos\alpha,\\ &\mu'=\alpha'\cos\delta\cos\alpha-\delta'\sin\delta\sin\alpha,\\ &\nu'=\delta'\cos\delta,\\ &\lambda''=-\alpha''\cos\delta\sin\alpha-\delta''\sin\delta\cos\alpha+2\alpha'\delta'\sin\delta\sin\alpha-\\ &\qquad\qquad -(\alpha'^2+\delta'^2)\cos\delta\cos\alpha,\\ &\mu''=\alpha''\cos\delta\cos\alpha-\delta''\sin\delta\sin\alpha-2\alpha'\delta'\sin\delta\cos\alpha-\\ &\qquad\qquad -(\alpha'^2+\delta'^2)\cos\delta\sin\alpha,\\ &\nu''=\delta''\cos\delta-\delta'^2\sin\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (11.12)$$

В этом случае формулу (11.6) придется применять для вычисления производных только двух величин α и δ. Конечно, этот способ неприменим, если видимый путь светила проходит вблизи полюса экватора.

§ 12. Точность метода Лапласа

Для сравнения точности, даваемой методом Лапласа, с тем, что дают рассмотренные раньше методы, проще всего преобразовать метод Лапласа так, чтобы он давал непосредственно геоцентрические расстояния в моменты наблюдения.

Для этого из соотношений (11.1), написанных для всех трех моментов, составим следующие комбинации:

$$\frac{\tau_1\lambda_1\rho_1 - \tau\lambda\rho + \tau_2\lambda_2\rho_2}{\tau\tau_1\tau_2} = \frac{\tau_1 x_1 - \tau x + \tau_2 x_2}{\tau\tau_1\tau_2} + \frac{\tau_1 X_1 - \tau X + \tau_2 X_2}{\tau\tau_1\tau_2}.$$

Соотношения (11.6) и (11.2) показывают, что с принятой нами точностью можно положить

$$\frac{\tau_1 x_1 - \tau x + \tau_2 x_2}{\tau\tau_1\tau_2} = \frac{1}{2} x'' = -\frac{1}{2} x r^{-3} = \frac{1}{2}(X - \lambda\rho) r^{-3},$$

вследствие чего предыдущие равенства могут быть переписаны так:

$$n_1^0\lambda_1\rho_1 - \left(1 - \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right)\lambda\rho + n_2^0\lambda_2\rho_2 = n_1^0 X_1 - \left(1 - \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right) X + n_2^0 X_2,$$

. . . . ,

где, как всегда, $n_1^0 = \tau_1/\tau$; $n_2^0 = \tau_2/\tau$.

Это показывает, что метод Лапласа эквивалентен нахождению геоцентрических расстояний из уравнений

$$\left.\begin{aligned} n_1\lambda_1\rho_1 - \lambda\rho + n_2\lambda_2\rho_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2, \\ n_1\mu_1\rho_1 - \mu\rho + n_2\mu_2\rho_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, \\ n_1\nu_1\rho_1 - \nu\rho + n_2\nu_2\rho_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2, \end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

в которых

$$n_1 = n_1^0\left(1 - \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right)^{-1}; \qquad n_2 = n_2^0\left(1 - \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right)^{-1}. \qquad (12.2)$$

Значения (12.2) тождественны, в границах принятой точности, с теми значениями (3.6), которые были употреблены в первом приближении Лагранжем и, вслед за ним, Гауссом. Таким образом, метод Лапласа дает в первом приближении геоцентрические расстояния с тою же точностью, как и эти методы. Но он дает в случае неравных интервалов времени между наблюдениями меньшую точность, нежели метод Лагранжа — Гаусса, основанный на формулах (3.7).

Н. Стойко [1931 a] подробно изучил точность, даваемую первыми приближениями всех этих методов. В другой работе [Стойко, 1931 b] он сравнил различные методы с точки зрения объема требуемых ими вычислений. Эти вопросы были изучены также Херриком [1940], пришедшим к несколько иным выводам.

§ 13. Работы Чаллиса и Виллярсо

Метод Лапласа является с теоретической стороны наиболее прямым решением задачи о нахождении планетных и кометных орбит. Было сделано много попыток придать ему форму, достаточно удобную и для практического применения. Как первый и