Для этого из соотношений (11.1), написанных для всех трех моментов, составим следующие комбинации:

$$\frac{\tau_1\lambda_1\rho_1 - \tau\lambda\rho + \tau_2\lambda_2\rho_2}{\tau\tau_1\tau_2} = \frac{\tau_1 x_1 - \tau x + \tau_2 x_2}{\tau\tau_1\tau_2} + \frac{\tau_1 X_1 - \tau X + \tau_2 X_2}{\tau\tau_1\tau_2}.$$

Соотношения (11.6) и (11.2) показывают, что с принятой нами точностью можно положить

$$\frac{\tau_1 x_1 - \tau x + \tau_2 x_2}{\tau\tau_1\tau_2} = \frac{1}{2}x'' = -\frac{1}{2}xr^{-3} = \frac{1}{2}(X - \lambda\rho)r^{-3},$$

вследствие чего предыдущие равенства могут быть переписаны так:

$$n_1^0\lambda_1\rho_1 - \left(1 - \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right)\lambda\rho + n_2^0\lambda_2\rho_2 = n_1^0 X_1 - \left(1 - \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right)X + n_2^0 X_2,$$

. . . . ,

где, как всегда, $n_1^0 = \tau_1/\tau$; $n_2^0 = \tau_2/\tau$.

Это показывает, что метод Лапласа эквивалентен нахождению геоцентрических расстояний из уравнений

$$\left.\begin{aligned} n_1\lambda_1\rho_1 - \lambda\rho + n_2\lambda_2\rho_2 &= n_1X_1 - X + n_2X_2, \\ n_1\mu_1\rho_1 - \mu\rho + n_2\mu_2\rho_2 &= n_1Y_1 - Y + n_2Y_2, \\ n_1\nu_1\rho_1 - \nu\rho + n_2\nu_2\rho_2 &= n_1Z_1 - Z + n_2Z_2, \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

в которых

$$n_1 = n_1^0\left(1 - \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right)^{-1}; \quad n_2 = n_2^0\left(1 - \frac{\tau_1\tau_2}{2r^3}\right)^{-1}. \tag{12.2}$$

Значения (12.2) тождественны, в границах принятой точности, с теми значениями (3.6), которые были употреблены в первом приближении Лагранжем и, вслед за ним, Гауссом. Таким образом, метод Лапласа дает в первом приближении геоцентрические расстояния с тою же точностью, как и эти методы. Но он дает в случае неравных интервалов времени между наблюдениями меньшую точность, нежели метод Лагранжа — Гаусса, основанный на формулах (3.7).

Н. Стойко [1931 а] подробно изучил точность, даваемую первыми приближениями всех этих методов. В другой работе [Стойко, 1931 b] он сравнил различные методы с точки зрения объема требуемых ими вычислений. Эти вопросы были изучены также Херриком [1940], пришедшим к несколько иным выводам.

§ 13. Работы Чаллиса и Виллярсо

Метод Лапласа является с теоретической стороны наиболее прямым решением задачи о нахождении планетных и кометных орбит. Было сделано много попыток придать ему форму, достаточно удобную и для практического применения. Как первый и притом весьма существенный результат, достигнутый в этом направлении, мы можем рассматривать метод, предложенный Чаллисом в 1848 г. [Чаллис, 1849]. Автор правильно считает, что его метод «в принципе похож на метод Лапласа и может быть рассматриваем как обобщение этого последнего».

За промежуточные неизвестные Чаллис принимает не геоцентрическое расстояние ρ_0 в момент среднего наблюдения и его производную ρ_0', а гелиоцентрические координаты и компоненты скорости x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0' в этот момент. Пользуясь дифференциальными уравнениями движения, он выражает через эти неизвестные гелиоцентрические координаты светила в моменты двух крайних наблюдений (ср. § 12 гл. III). При помощи известных из наблюдений прямых восхождений и склонений в моменты трех наблюдений отсюда легко получить уравнения, решающие задачу. Надобность в предварительном вычислении первых и вторых производных сферических координат светила здесь, таким образом, отпадает.

В первом приближении полученные уравнения решают, отбрасывая третьи и высшие производные x_0''', y_0''', ... В последующих приближениях для этих производных берутся все более и более точные значения, получаемые при помощи дифференцирования уравнений движения.

Мемуар Чаллиса содержит важные нововведения, получившие распространение лишь много позже. Так, он едва ли не первый заменил эклиптические координаты экваториальными и стал применять способ учета параллакса путем перехода от геоцентрических координат Солнца к топоцентрическим. Но, может быть, именно вследствие всех этих новшеств метод Чаллиса не вошел в употребление, несмотря на то, что его эффективность была хорошо показана подробно изложенным примером.

Насколько незаслуженно был забыт метод Чаллиса, показывает появление метода Вилькенса [1919], который отличается от него (и не всегда удачно) только второстепенными деталями. Между тем метод Вилькенса был помещен в широко распространенной монографии [Штракке, 1929].

Обратимся теперь к обширному мемуару Виллярсо [1857], написанному в форме подробного руководства для вычисления орбит. Излагаемый Виллярсо метод, как в общем случае, так и в случае параболической орбиты, по существу, совпадает с методом Лапласа (имя которого не упомянуто). Но форма, в которой этот метод здесь представлен, имеет ясный отпечаток влияния Гаусса.

Особое преимущество своего метода Виллярсо видит в возможности базировать вычисление предварительной орбиты на произвольно большом числе наблюдений. Излагая интерполяционные методы вычисления производных сферических координат, он использует многочисленные работы Коши, который в 1846—1848 гг. много занимался математическими вопросами, связанными с задачами теоретической астрономии [Коши, 1897].

Вопрос об учете параллакса и аберрации, едва затронутый Лапласом, Виллярсо рассмотрел весьма обстоятельно, следуя Гауссу. Но он почти ничего не прибавил к способу, предложенному Лапласом для перехода от первого приближения к более точной орбите. Этот способ заключался в нахождении таких поправок к принятым значениям сферических координат в начальный момент и их первых и вторых производных, которые по возможности уменьшают расхождения между вычисленными и наблюденными положениями светила, причем коэффициенты соответствующих условных уравнений находятся численно при помощи варьирования шести неизвестных величин.

Метод Виллярсо в течение некоторого времени употреблялся французскими астрономами, но вытеснить методы Гаусса и Ольберса он не мог и был вскоре оставлен.

§ 14. Работы Харцера и Лойшнера

Новая попытка улучшить метод Лапласа так, чтобы он мог получить широкое распространение, была сделана Харцером [1896]. Вместо эклиптических координат, применявшихся Лапласом и Виллярсо, Харцер пользуется, подобно Чаллису, экваториальными координатами и за исходные величины принимает α, $\operatorname{tg}\delta$ и их производные α', $(\operatorname{tg}\delta)'$, α'', $(\operatorname{tg}\delta)''$ для некоторого начальиого момента. Исходные значения этих шести величин он находит при помощи пяти наблюдеиий, путем вычисления коэффициентов разложений

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 + f_1\theta + f_2\theta^2 + f_3\theta^3 + f_4\theta^4,$$

$$\operatorname{tg}\delta(\theta) = \operatorname{tg}\delta_0 + g_1\theta + g_2\theta^2 + g_3\theta^3 + g_4\theta^4,$$

где

$$\theta = k(t - t_0).$$

Полученные исходные значения позволяют, путем решения уравнений, совпадающих по существу с (11.3), найти сокращенное геоцентрическое расстояние $\sigma = \rho\cos\delta$ и его производную σ'. В этом заключается первое приближение, только по форме отличающееся от лапласова. Но дальнейшее уточнение Харцер проводит иначе. Он ищет поправки Δx, Δy, Δz, $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, которые нужно придать гелиоцентрическому положению светила и его скорости в начальный момент для достижения наилучшего согласия с пятью взятыми за основу наблюдениями. Эти поправки