произвольно большом числе наблюдений. Излагая интерполяционные методы вычисления производных сферических координат, он использует многочисленные работы Коши, который в 1846—1848 гг. много занимался математическими вопросами, связанными с задачами теоретической астрономии [Коши, 1897].

Вопрос об учете параллакса и аберрации, едва затронутый Лапласом, Виллярсо рассмотрел весьма обстоятельно, следуя Гауссу. Но он почти ничего не прибавил к способу, предложенному Лапласом для перехода от первого приближения к более точной орбите. Этот способ заключался в нахождении таких поправок к принятым значениям сферических координат в начальный момент и их первых и вторых производных, которые по возможности уменьшают расхождения между вычисленными и наблюденными положениями светила, причем коэффициенты соответствующих условных уравнений находятся численно при помощи варьирования шести неизвестных величин.

Метод Виллярсо в течение некоторого времени употреблялся французскими астрономами, но вытеснить методы Гаусса и Ольберса он не мог и был вскоре оставлен.

§ 14. Работы Харцера и Лойшнера

Новая попытка улучшить метод Лапласа так, чтобы он мог получить широкое распространение, была сделана Харцером [1896]. Вместо эклиптических координат, применявшихся Лапласом и Виллярсо, Харцер пользуется, подобно Чаллису, экваториальными координатами и за исходные величины принимает α, $\operatorname{tg}\delta$ и их производные α', $(\operatorname{tg}\delta)'$, α'', $(\operatorname{tg}\delta)''$ для некоторого начального момента. Исходные значения этих шести величин он находит при помощи пяти наблюдений, путем вычисления коэффициентов разложений

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 + f_1\theta + f_2\theta^2 + f_3\theta^3 + f_4\theta^4,$$

$$\operatorname{tg}\delta(\theta) = \operatorname{tg}\delta_0 + g_1\theta + g_2\theta^2 + g_3\theta^3 + g_4\theta^4,$$

где

$$\theta = k(t - t_0).$$

Полученные исходные значения позволяют, путем решения уравнений, совпадающих по существу с (11.3), найти сокращенное геоцентрическое расстояние $\sigma = \rho\cos\delta$ и его производную σ'. В этом заключается первое приближение, только по форме отличающееся от лапласова. Но дальнейшее уточнение Харцер проводит иначе. Он ищет поправки Δx, Δy, Δz, $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, которые нужно придать гелиоцентрическому положению светила и его скорости в начальный момент для достижения наилучшего согласия с пятью взятыми за основу наблюдениями. Эти поправки получаются посредством решения десяти условных уравнений методом Коши. Для коэффициентов условных уравнений Харцер дает достаточно простые аналитические выражения. Он пользуется для этого разложениями Лагранжа (4.1), (4.2). Такой путь представляется гораздо более удобным, нежели тот, которому следовали Лаплас и Виллярсо.

Дальнейшим развитием идеи Харцера об использовании лагранжевых разложений функций F и G явился предложенный Лойшнером метод [Лойшнер, 1913]. В нем число используемых наблюдений ограничивается тремя, а за неизвестные, подлежащие вычислению во втором и следующих приближениях, принимаются величины ρ_0, x_0', y_0', z_0' для момента среднего наблюдения. Эти четыре неизвестных находятся из условия точного представления прямых восхождений и склонений для двух крайних наблюдений.

Такая замена трех неизвестных

$$\Delta x_0 = \cos\alpha_0 \cos\delta_0 \Delta\rho_0; \quad \Delta y_0 = \sin\alpha_0 \cos\delta_0 \Delta\rho_0; \quad \Delta z_0 = \sin\delta_0 \Delta\rho_0$$

одной неизвестной $\Delta\rho_0$ существенно сокращает работу. Для вычисления коэффициентов линейных уравнений, дающих неизвестные $\Delta\rho_0$, $\Delta x_0'$, $\Delta y_0'$, $\Delta z_0'$, Лойшнер применяет формулы, аналогичные использованным Харцером. Но он отмечает, что в формулах

$$x = Fx_0 + Gx_0'; \quad y = Fy_0 + Gy_0'; \quad \ldots, \tag{14.1}$$

вместо разложений функций F и G по степеням интервала времени можно, когда такие разложения недостаточно быстро сходятся, пользоваться конечными выражениями

$$\left.\begin{aligned} F &= 1 - \frac{2a}{r_0}\sin^2 g; \qquad g = \frac{1}{2}(E - E_0), \\ G &= k(t - t_0) - a^{3/2}(2g - \sin 2g) = \\ &= a^{1/2} r_0 \sin 2g + 2ar_0 r_0' \sin^2 g. \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

Эти формулы были введены в употребление Кюнертом [1879] в связи с решением аналогичной задачи.

Формулы (14.2) в методе Лапласа соответствуют формулам для вычисления отношения площадей сектора и треугольника в методе Гаусса.

Можно, впрочем, отметить, что действительная надобность в замене разложений Лагранжа замкнутыми формулами (14.2) возникает лишь в условиях, которые при вычислении предварительной орбиты практически не встречаются.

Лойшнер, развивший этот метод еще в 1902 г., ввел его в употребление на Студенческой обсерватории Калифорнийского университета (Беркли), где вычислялось много орбит. Благодаря его энергии рассматриваемый метод (иногда называемый методом Лапласа — Лойшнера) привлек к себе внимание. Он был очень подробно изложен Бухгольцем в дополнении к изданию 1912 г. широко распространенного руководства [Клинкерфюс, 1871], Пикаром [1913], Крауфордом [1930] и Виллиамсом [1934].

Разработанный Штумпфом «Краткий метод нахождения орбит из трех или большего числа наблюдений» [Штумпф, 1931] можно рассматривать как завершающий этап этого направления в развитии основной идеи Лапласа. Этот метод, подобно уже упомянутому методу Вилькенса (§ 13), по существу, мало отличается от развитого Чаллисом. Но для вычисления функций F и G, входящих в формулы (14.1), Штумпф дает более удобные формулы. Он выражает эти функции через величины

$$\mu = 1/r^3; \quad \sigma_1 = r'/r; \quad \sigma_2 = r''/r,$$

для вычисления которых служат формулы

$$\sigma_1 = (xx' + yy' + zz')\, r^{-2}; \quad w^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$
$$\sigma_2 = w^2 r^{-2} - \mu - \sigma_1^2.$$

Нахождение коэффициентов разложений существенно облегчается небольшими вспомогательными таблицами.

Было сделано много попыток показать, что метод Лапласа — Лойшнера имеет практические преимущества перед современными формами методов, связанных с именами Лагранжа, Ольберса и Гаусса. Однако тщательный разбор этого вопроса [Кон, 1918; Стойко, 1931; Херрик, 1940] привел скорее к обратному заключению. Вариант метода Лапласа, разработанный Чаллисом, Вилькенсом и Штумпфом, такому подробному изучению не подвергался.

§ 15. Метод фиктивных положений

Обзор, сделанный в двух последних параграфах, показывает, что первое приближение в методе Лапласа оставалось в дальнейшем без существенных изменений. Все усилия позднейших авторов были направлены на усовершенствование перехода от приближенного решения к точному.

Еще одно решение этой задачи, весьма простое и, по-видимому, весьма эффективное, было дано А. Данжоном [1951, 1952—1953], который назвал предложенный им вариант метода Лапласа *методом фиктивных положений.*

При вычислении орбиты по методу Лапласа на основе трех наблюдений t_h, α_h, δ_h, где $h = 0, 1, 2$, для первого приближения используется матрица

$$\begin{Vmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \delta, & \delta', & \delta'' \end{Vmatrix}, \tag{15.1}$$