его энергии рассматриваемый метод (иногда называемый методом Лапласа — Лойшнера) привлек к себе внимание. Он был очень подробно изложен Бухгольцем в дополнении к изданию 1912 г. широко распространенного руководства [Клинкерфюс, 1871], Пикаром [1913], Крауфордом [1930] и Виллиамсом [1934].

Разработанный Штумпфом «Краткий метод нахождения орбит из трех или большего числа наблюдений» [Штумпф, 1931] можно рассматривать как завершающий этап этого направления в развитии основной идеи Лапласа. Этот метод, подобно уже упомянутому методу Вилькенса (§ 13), по существу, мало отличается от развитого Чаллисом. Но для вычисления функций F и G, входящих в формулы (14.1), Штумпф дает более удобные формулы. Он выражает эти функции через величины

$$\mu = 1/r^3; \quad \sigma_1 = r'/r; \quad \sigma_2 = r''/r,$$

для вычисления которых служат формулы

$$\sigma_1 = (xx' + yy' + zz')\,r^{-2}; \quad w^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$
$$\sigma_2 = w^2 r^{-2} - \mu - \sigma_1^2.$$

Нахождение коэффициентов разложений существенно облегчается небольшими вспомогательными таблицами.

Было сделано много попыток показать, что метод Лапласа — Лойшнера имеет практические преимущества перед современными формами методов, связанных с именами Лагранжа, Ольберса и Гаусса. Однако тщательный разбор этого вопроса [Кон, 1918; Стойко, 1931; Херрик, 1940] привел скорее к обратному заключению. Вариант метода Лапласа, разработанный Чаллисом, Вилькенсом и Штумпфом, такому подробному изучению не подвергался.

§ 15. Метод фиктивных положений

Обзор, сделанный в двух последних параграфах, показывает, что первое приближение в методе Лапласа оставалось в дальнейшем без существенных изменений. Все усилия позднейших авторов были направлены на усовершенствование перехода от приближенного решения к точному.

Еще одно решение этой задачи, весьма простое и, по-видимому, весьма эффективное, было дано А. Данжоном [1951, 1952—1953], который назвал предложенный им вариант метода Лапласа *методом фиктивных положений*.

При вычислении орбиты по методу Лапласа на основе трех наблюдений t_h, α_h, δ_h, где $h = 0, 1, 2$, для первого приближения используется матрица

$$\begin{Vmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \delta, & \delta', & \delta'' \end{Vmatrix}, \tag{15.1}$$

содержащая сферические координаты и их производные для некоторого момента t.

Элементы матрицы (15.1) получаются из наблюденных величин t_h, α_h, δ_h при помощи приближенной формулы (11.5), а потому имеют более или менее значительные погрешности.

Таким образом, хотя применяемые в методе Лапласа соотношения (11.12), (11.3), (11.1) и (11.4) являются вполне строгими (так же как и формулы, служащие для вычисления элементов орбиты по x, y, z, x', y', z'), орбита будет приближенной и не будет точно представлять три исходные наблюдения.

Во всех рассмотренных нами выше вариантах метода Лапласа матрица (15.1) служит для получения только первого приближения. Чтобы найти более точную орбиту, производится улучшение промежуточных величин: либо x, y, z, x', y', z', либо ρ, x', y', z'.

А. Данжон предложил идти другим путем: искать такую матрицу (названную им **фиктивным положением**)

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_*, & \alpha'_*, & \alpha''_* \\ \delta_*, & \delta'_*, & \delta''_* \end{matrix} \right\|, \tag{15.2}$$

которая, после применения к ней метода Лапласа, дала бы точное представление всех трех положений.

Пусть орбита, основанная на матрице (15.1), дает для моментов t_h положения (α_h^c, δ_h^c), отличающиеся на

$$\Delta\alpha_h = \alpha_h - \alpha_h^c; \qquad \Delta\delta_h = \delta_h - \delta_h^c$$

от исходных положений.

Если вычислить для второго приближения матрицу (15.2) при помощи положений

$$\alpha_h + \Delta\alpha_h, \quad \delta_h + \Delta\delta_h \quad (h = 0,\ 1,\ 2), \tag{15.3}$$

соответствующих моментам t_h (исправленным, если нужно, за планетную аберрацию), то соответствующая (15.2) орбита даст вычисленные положения, отличающиеся от вычисленных в первом приближении (α_h^c, δ_h^c) приблизительно настолько же, насколько исходные положения (15.3) второго приближения отличаются от исходных положений (α_h, δ_h) первого приближения.

Таким образом, можно ожидать, что вычисленные в конце второго приближения координаты светила будут мало отличаться от

$$\alpha_h^c + \Delta\alpha_h = \alpha_h; \quad \delta_h^c + \Delta\delta_h = \delta_h,$$

т. е. будут гораздо ближе к наблюденным, нежели α_h^c, δ_h^c.

Второе приближение может оказаться недостаточным. Тогда полученные в конце этого приближения разности между наблюденными и вычисленными значениями координат надо использовать для составления нового фиктивного положения, аналогичного (15.2), и снова воспользоваться формулами метода Лапласа.

Число последовательных приближений, необходимое для достижения определенной точности, здесь будет, вообще говоря, несколько больше, нежели в методе Лагранжа — Гаусса. Но неоспоримым преимуществом метода Лапласа—Данжона является крайняя простота применяемых формул. Это делает рассматриваемый метод весьма пригодным для машинного вычисления, где число последовательных приближений, выполняемых по одним и тем же формулам, не имеет сколько-нибудь существенного значения.

Изложенный метод является теоретически наиболее простым из всех методов вычисления орбит и, несомненно, заслуживает испытания на практике. Поэтому остановимся на некоторых особенностях его применения.

Для вычисления первых и вторых производных сферических координат α, δ и координат Солнца X, Y, Z в том случае, когда за основной момент берется момент среднего наблюдения, служат формулы (11.6). Эти формулы можно представить в следующем, иногда более удобном виде:

$$\left.\begin{aligned} f'(\theta_0) &= \frac{\tau_2}{\tau\tau_1}(f_2-f_0)+\frac{\tau_1}{\tau\tau_2}(f_0-f_1),\\ \frac{1}{2}f''(\theta_0) &= \frac{1}{\tau\tau_1}(f_2-f_0)-\frac{1}{\tau\tau_2}(f_0-f_1). \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

Если промежутки времени между наблюдениями весьма значительно между собой отличаются, то может оказаться выгодным прибегнуть к указанному Пуанкаре приему (§ 11).

Если за основной момент взять

$$t_* = \frac{1}{3}(t_1+t_0+t_2), \tag{15.5}$$

и положить

$$\theta_h = k(t_h - t_*),$$

то для нахождения величин f_*, f'_*, f''_*, соответствующих моменту (15.5), будем иметь уравнения

$$f_h = f_* + f'_*\theta_h + \frac{1}{2}f''_*\theta_h^2 \qquad (h=0,\ 1,\ 2).$$

Решение этих уравнений дается формулами

$$q_1 = (f_0 - f_1)/(\theta_0 - \theta_1); \quad q_2 = (f_2 - f_0)/(\theta_2 - \theta_0),$$

$$\frac{1}{2} f''_* = (q_2 - q_1)/(\theta_2 - \theta_1), \tag{15.6}$$

$$f'_* = q_1 - \frac{1}{2} f''_* (\theta_0 + \theta_1) = q_2 - \frac{1}{2} f''_* (\theta_0 + \theta_2),$$

$$f_* = f_h - f'_* \theta_h - f''_* \theta_h^2; \qquad h = 0,\ 1,\ 2.$$

Аберрация учитывается как обычно: при помощи геоцентрических расстояний, полученных в первом приближении, исправляются моменты наблюдений. Но на учете параллакса необходимо остановиться подробнее.

Основой всякого метода вычисления орбиты являются соотношения

$$\lambda_h \rho_h = x_h + X_h; \quad \mu_h \rho_h = y_h + Y_h; \quad \nu_h \rho_h = z_h + Z_h, \tag{15.7}$$

связывающие гелиоцентрические координаты светила с координатами светила, отнесенными к соответствующему месту наблюдения — действительному или фиктивному. В вариантах метода Лапласа, данных большинством авторов, за фиктивное место каждого наблюдения принимается положение барицентра системы Земля — Луна в момент этого наблюдения. Так поступает и Данжон. Этот путь имеет то преимущество, что позволяет пользоваться соотношениями (11.7), но он связан с необходимостью вычислять барицентрические значения λ_h, μ_h, ν_h и барицентрические координаты Солнца для ряда равноотстоящих моментов с целью получения X_h, Y_h, Z_h, X'_h, Y'_h, Z'_h.

Другой способ учета параллакса заключается в употреблении в соотношениях (15.7) топоцентрических координат светила и Солнца, как это теперь всегда делается в методах, базирующихся на идеях Лагранжа и Гаусса. Возможность применения этого способа в методе Лапласа была показана Чаллисом [1849], а затем Вяйсяля [1924]. В методе фиктивных положений он может быть применен следующим образом.

Пусть в каждом из соотношений (15.7) координаты $\lambda_h \rho_h$, $\mu_h \rho_h$, ... и X_h, ... являются топоцентрическими, т. е. отнесены к положению наблюдателя в момент t_h.

Для применения метода Лапласа нужно составить следующие уравнения (§ 11):

$$\lambda \rho = x + X; \ \ldots, \tag{15.8}$$

$$\lambda' \rho + \lambda \rho' = x' + X'; \ \ldots, \tag{15.9}$$

$$\lambda'' \rho + 2\lambda' \rho' + \lambda \rho'' = (X - \rho\lambda) r^{-3} + X''; \ \ldots \tag{15.10}$$

Это требует вычисления величин α, α', α'', δ, δ', δ'' и X, X', X'', ..., соответствующих некоторому выбранному нами моменту t, и применения формул (11.12).

Чтобы получить, например, X, X', X'', мы должны воспользоваться формулами (15.4) или (15.6), т. е. соединить положения, которые занимали наблюдатели в моменты t_1, t_0, t_2, некоторой плавной кривой. Столь же условный характер имеют и производные направляющих косинусов, которые для нас существуют только в указанные три момента. Но все вычисляемые по интерполяционным формулам (15.4) или (15.6) величины будут всегда связаны соотношениями (15.8), (15.9), (15.10).

Итерации, составляющие метод фиктивных положений, будут закончены получением элементов, удовлетворяющих равенствам (15.7), т. е. полностью учитывающих параллакс.

В заключение заметим, что для улучшения полученной орбиты при помощи произвольно большого числа наблюдений Данжон предложил варьировать элементы матрицы вида (15.1), полученной в результате вычисления орбиты по трем наблюдениям. Такой способ аналогичен способу вариации геоцентрических расстояний (§ 3 гл. XI), но является более строгим, так как не требует придания бесконечно большого веса двум основным наблюдениям.

§ 16. Метод Вяйсяля

В XIX в. много усилий было затрачено на создание таких методов вычисления орбит, которые давали бы сразу возможно большее приближение. Это достигалось ценою неизбежного усложнения применяемых формул. За последние десятилетия стала преобладать противоположная тенденция: возможно упростить формулы, не опасаясь увеличения числа их повторного применения. Одним из наиболее удачных осуществлений этой идеи является метод, предложенный Вяйсяля [1940].

Пусть (α_1, δ_1), (α, δ), (α_2, δ_2) координаты светила в моменты t_1, t, t_2 $(t_1 < t < t_2)$.

Приняв для геоцентрического расстояния ρ в момент среднего наблюдения какое-либо подходящее значение, найдем соответствующие значения величин

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\delta\cos\alpha - X; \\ y &= \rho\cos\delta\sin\alpha - Y; \\ z &= \rho\sin\delta - Z; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}\right\} \qquad (16.1)$$

Это позволяет вычислить

$$F_h = 1 - a_2\theta_h^2 + \Delta F_h; \quad G_h = \theta_h - b_3\theta_h^3 + \Delta G_h. \qquad (16.2)$$