Это требует вычисления величин α, α', α'', δ, δ', δ'' и X, X', X'', ..., соответствующих некоторому выбранному нами моменту t, и применения формул (11.12).

Чтобы получить, например, X, X', X'', мы должны воспользоваться формулами (15.4) или (15.6), т. е. соединить положения, которые занимали наблюдатели в моменты t_1, t_0, t_2, некоторой плавной кривой. Столь же условный характер имеют и производные направляющих косинусов, которые для нас существуют только в указанные три момента. Но все вычисляемые по интерполяционным формулам (15.4) или (15.6) величины будут всегда связаны соотношениями (15.8), (15.9), (15.10).

Итерации, составляющие метод фиктивных положений, будут закончены получением элементов, удовлетворяющих равенствам (15.7), т. е. полностью учитывающих параллакс.

В заключение заметим, что для улучшения полученной орбиты при помощи произвольно большого числа наблюдений Данжон предложил варьировать элементы матрицы вида (15.1), полученной в результате вычисления орбиты по трем наблюдениям. Такой способ аналогичен способу вариации геоцентрических расстояний (§ 3 гл. XI), но является более строгим, так как не требует придания бесконечно большого веса двум основным наблюдениям.

§ 16. Метод Вяйсяля

В XIX в. много усилий было затрачено на создание таких методов вычисления орбит, которые давали бы сразу возможно большее приближение. Это достигалось ценою неизбежного усложнения применяемых формул. За последние десятилетия стала преобладать противоположная тенденция: возможно упростить формулы, не опасаясь увеличения числа их повторного применения. Одним из наиболее удачных осуществлений этой идеи является метод, предложенный Вяйсяля [1940].

Пусть (α_1, δ_1), (α, δ), (α_2, δ_2) координаты светила в моменты t_1, t, t_2 $(t_1 < t < t_2)$.

Приняв для геоцентрического расстояния ρ в момент среднего наблюдения какое-либо подходящее значение, найдем соответствующие значения величин

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\delta\cos\alpha - X;\\ y &= \rho\cos\delta\sin\alpha - Y;\\ z &= \rho\sin\delta - Z;\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}\right\} \qquad (16.1)$$

Это позволяет вычислить

$$F_h = 1 - a_2\theta_h^2 + \Delta F_h;\quad G_h = \theta_h - b_3\theta_h^3 + \Delta G_h. \qquad (16.2)$$

где

$$a_2=\frac{1}{2}r^{-3};\qquad b_3=\frac{1}{3}a_2;\qquad \theta_h=k(t_h-t);\qquad h=1,\ 2,\quad (16.3)$$

а поправки ΔF_h, ΔG_h в первом приближении принимаются равными нулю.

Из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_h&=\rho_h\cos\delta_h\cos\alpha_h-X_h,\\ y_h&=\rho_h\cos\delta_h\sin\alpha_h-Y_h,\\ z_h&=\rho_h\sin\delta_h-Z_h,\end{aligned}\right\}\qquad (16.4)$$

соответствующих двум крайним наблюдениям, исключаем геоцентрические расстояния. Это дает

$$y_h+Y_h=\operatorname{tg}\alpha_h(x_h+X_h),\quad h=1,\ 2.$$

Подставив в эти равенства выражения

$$x_h=xF_h+x'G_h;\quad y_h=yF_h+y'G_h,\qquad (16.5)$$

получим два уравнения, позволяющие вычислить производные x' и y'. Решение этих уравнений можно представить так:

$$x'=\frac{A_2-A_1}{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2};\quad y'=A_h+x'\operatorname{tg}\alpha_h,\qquad (16.6)$$

где

$$A_h=F_hG_h^{-1}(x\operatorname{tg}\alpha_h-y)+G^{-1}(X_h\operatorname{tg}\alpha_h-Y_h).$$

При помощи полученных значений (16.6) равенства (16.4) и (16.5) позволяют найти геоцентрические расстояния ρ_h:

$$\left.\begin{aligned} \rho_h&=\sec\delta_h\sec\alpha_h(xF_h+x'G_h+X_h),\\ \rho_h&=\sec\delta_h\operatorname{cosec}\alpha_h(yF_h+y'G_h+Y_h).\end{aligned}\right\}\qquad (16.7)$$

Воспользуемся теперь последними из соотношений (16.4) и (16.5) для нахождения производной z'. Тогда получим два значения:

$$(z')_h=G_h^{-1}(\rho_h\sin\delta_h-F_hz-Z_h).\qquad (16.8)$$

Разность этих значений будет некоторой функцией ρ:

$$f(\rho)=(z')_2-(z')_1.$$

Задача приводится к нахождению такого значения ρ, при котором

$$f(\rho)=0.\qquad (16.9)$$

Решение этого уравнения выполняется обычными интерполяционными приемами.

Когда получено достаточно точное значение ρ, то в формулах (16.2) учитываются члены высших порядков, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\Delta F_h &= a_3\theta_h^3 + a_4\theta_h^4 + \ldots,\\ \Delta G_h &= b_4\theta_h^4 + b_5\theta_h^5 + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{16.10}$$

Входящие в них коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$rr' = xx' + yy' + zz'; \qquad c_1 = rr'/r^2,$$

$$w^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2; \qquad c_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{w^2}{r^2} - 2a_2 - c_1^2\right),$$

$$a_3 = c_1 a_2; \qquad b_4 = \frac{1}{2}a_3,$$

$$a_4 = a_2\left(\frac{1}{2}b_3 + c_2 - c_1^2\right); \qquad b_5 = \frac{1}{5}(3a_4 - a_2 b_3),$$

$$a_5 = -c_1(2c_1 a_3 + 3a_4); \qquad b_6 = \frac{2}{3}a_5 + b_3 b_4,$$

$$a_6 = -c_1(c_2 a_3 + c_1 a_4 + 2a_5) - 2c_2 a_4 - b_3 b_5,$$

$$b_7 = \frac{1}{7}(5a_6 + 3a_2 b_5 - a_3 b_4 - a_4 b_3).$$

Количество принимаемых во внимание членов зависит, конечно, от величины интервалов θ_h.

В более поздней работе [Вяйсяля и Отерма, 1951] разложения (16.10) были даны до членов десятого порядка, причем для многих коэффициентов были указаны контрольные формулы. Столь большое число членов в этих разложениях, ненужное при вычислении орбиты в нормальных условиях, может оказаться полезным для вычисления эфемериды при помощи формул (16.5) и (16.2). Такой способ получения эфемериды, не требующий нахождения элементов, иногда очень удобен, даже если в разложениях (16.10) приходится брать большое число членов.

В первом приближении, когда каждое из разложений (16.2) ограничено двумя первыми членами, уравнение (16.9) можно легко представить в явном виде. Выполнив нужное для этого исключение промежуточных величин, мы получим уравнение (3.8), т. е. улучшенную форму уравнения Лагранжа. Таким образом, метод Вяйсяля можно рассматривать как упрощенный вариант метода Лагранжа.

Рассматриваемый метод, подобно другим вариантам метода Лагранжа, открывает удобный путь для получения параболической орбиты без использования теоремы Эйлера. В самом деле, если формула

$$a^{-1} = 2r^{-1} - w^2, \tag{16.11}$$

служащая здесь для нахождения большой полуоси, даст для a^{-1} величину, близкую к нулю, то дальнейшее уточнение ρ можно вести так, чтобы удовлетворить не уравнению (16.9), а уравнению

$$rw^2 = 2.$$

Указанные формулы весьма пригодны и для получения эллиптической «перигелийной» орбиты, определяемой двумя условиями: $r' = 0$ и $a > r$.

Такая орбита, находимая при помощи двух наблюдений, может с успехом заменить круговую орбиту (§ 5 гл. X).

Пусть имеем два наблюдения: $t(\alpha, \delta)$ и $t_1(\alpha_1, \delta_1)$. Введем сокращенные геоцентрические расстояния

$$\sigma = \rho \cos \delta, \quad \sigma_1 = \rho_1 \cos \delta_1 \tag{16.12}$$

и, приняв некоторое правдоподобное значение для σ, вычислим

$$x = \sigma \cos \alpha - X; \quad y = \sigma \sin \alpha - Y; \quad z = \sigma \operatorname{tg} \delta - Z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\theta_1 = k(t_1 - t); \quad a_2 = \frac{1}{2} r^{-3}; \quad b_3 = \frac{1}{3} a_2,$$

$$F_1 = 1 - a_2\theta_1^2; \quad G_1 = \theta_1 - b_3\theta_1^3.$$

Соотношения (16.4) и (16.5) дают

$$F_1 x + G x' = \sigma_1 \cos \alpha_1 - X_1,$$

$$F_1 y + G y' = \sigma_1 \sin \alpha_1 - Y_1,$$

$$F_1 z + G z' = \sigma_1 \operatorname{tg} \delta_1 - Z_1.$$

Умножив эти равенства соответственно на x, y, z, сложив их почленно и учтя, что

$$rr' = xx' + yy' + zz', \tag{16.13}$$

получим

$$\sigma_1 = \frac{F_1 r^2 + xX_1 + yY_1 + zZ_1}{x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 + z \operatorname{tg} \delta_1}.$$

Это дает возможность найти x', y', z':

$$G x' = \sigma_1 \cos \alpha_1 - F_1 x - X_1,$$

$$G y' = \sigma_1 \sin \alpha_1 - F_1 y - Y_1,$$

$$G z' = \sigma_1 \operatorname{tg} \delta_1 - F_1 z - Z_1.$$

Для контроля можно воспользоваться соотношением (16.13).

Вычисление большой полуоси по формуле (16.11) должно дать величину, не на много превосходящую r, поскольку желательно иметь орбиту с небольшим эксцентриситетом. Если это не имеет места, то принятое значение σ надо соответствующим образом изменить.

Если варьированием σ достичь выполнения условия

$$rw^2 = 1,$$

то получится круговая орбита.

Заметим, что Вяйсяля пользуется сокращенными расстояниями (16.12) не только в случае нахождения перигелийной орбиты, но и в общем случае, когда это дает несколько меньшее сокращение вычислений.

Метод Вяйсяля, отличающийся исключительной простотой применяемых формул, был широко испробован на практике. Все многочисленные орбиты, вычисленные, начиная с 1935 г., на обсерватории в Турку, были получены этим методом.

§ 17. Заключительные замечания

В предыдущих параграфах, говоря о методах вычислений планетных и кометных орбит, мы рассматривали почти исключительно только первую часть задачи — нахождение или гелиоцентрических координат для моментов наблюдений или гелиоцентрического положения и скорости для некоторого фиксированного момента. История второй части задачи, т. е. перехода от только что указанных величин к элементам орбиты, гораздо короче. Способы, которые были предложены для этой цели Эйлером и Гауссом, подверглись в дальнейшем лишь небольшим изменениям. Замечания, сделанные по этому поводу выше (§ 7), можно дополнить указанием на работу Херглотца [1906], содержащую довольно полный исторический обзор, и на библиографию, собранную Штракке [1928] и Г. М. Баженовым [1952].

Сделанный нами обзор методов решения первой части задачи имел своей целью не только дать достаточно полную картину их развития, но и изложить некоторые из них со всей полнотой, необходимой для практического применения.

Этот обзор показывает, что для вычисления орбит мы имеем в результате столь многочисленных усилий немало разнообразных путей, среди которых ясно намечаются три основных направления.

Первое из этих направлений, связываемое обычно с именем Лапласа, но намеченное еще Ньютоном, заключается в непосредственном использовании дифференциальных уравнений движения. Второй путь, подробно развитый Лагранжем, заключается в использовании решений этих дифференциальных уравнений при помощи рядов, расположенных по степеням интервалов времени. Наконец, третий путь получения точных гелиоцентрических положений светила был указан Гауссом. Он заключается в использовании решений дифференциальных уравнений не в виде рядов, а в замкнутой форме. Некоторые из предложенных