ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

ГЛАВА XIV

ЗАДАЧА НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛ

§ 1. Дифференциальные уравнения задачи и их первые интегралы

Задача нескольких тел заключается в изучении движения конечного числа материальных точек под действием их взаимного притяжения по закону Ньютона.

Обозначим через $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ массы рассматриваемых материальных точек. Пусть вектор ρ_i с компонентами ξ_i, η_i, ζ_i определяет положение точки m_i относительно точки O некоторой инерциальной системы отсчета. Через r_{ij} обозначим расстояние между точками m_i и m_j так, что

$$r_{ij} = |\rho_j - \rho_i| = [(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2]^{1/2}.$$

Притяжение, испытываемое точкой m_i со стороны точки m_j, по величине равно $k^2 m_i m_j / r_{ij}^2$, а по направлению совпадает с вектором $\rho_j - \rho_i$. Поэтому дифференциальные уравнения движения рассматриваемых точек напишутся следующим образом:

$$m_i \frac{d^2\rho_i}{dt^2} = k^2 \sum_{0}^{n-1}{}^{(i)} m_i m_j \frac{\rho_j - \rho_i}{r_{ij}^3}. \tag{1.1}$$

Знаком $\sum\limits_{0}^{n-1}{}^{(i)}$ обозначено суммирование от $j=0$ до $j=n-1$ с пропуском значения $j=i$.

В координатной форме уравнения (1.1) имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned}
m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= k^2 \sum_{0}^{n-1}{}^{(i)} m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{r_{ij}^3},\\
m_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= k^2 \sum_{0}^{n-1}{}^{(i)} m_i m_j \frac{\eta_j - \eta_i}{r_{ij}^3},\\
m_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= k^2 \sum_{0}^{n-1}{}^{(i)} m_i m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{r_{ij}^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Если положить

$$U = k^2 S \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \tag{1.3}$$

где символом S обозначена сумма, в которой каждая комбинация индексов i и j встречается один и только один раз, причем комбинации $i=j$ исключаются, то уравнения (1.2) можно написать так:

$$m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}; \quad m_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}; \quad m_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \tag{1.4}$$

Рыражение (1.3) является, таким образом, силовой функцией рассматриваемого движения. Оно было введено в употребление Лагранжем в 1773 г.

Рассматриваемая нами система находится под действием одних только внутренних сил. Эти силы, на основании третьего закона Ньютона, попарно равны и противоположно направлены. Таким образом, их сумма и результирующий момент относительно любой точки, неизменно связанной с инерциальной системой отсчета, равны нулю. Поэтому из уравнений (1.1) следует

$$\sum_0^{n-1} m_i \frac{d^2\rho_i}{dt^2} = 0; \quad \sum_0^{n-1} m_i \rho_i \times \frac{d^2\rho_i}{dt^2} = 0.$$

Отсюда, после интегрирования, находим

$$\sum_0^{n-1} m_i \frac{d\rho_i}{dt} = a; \quad \sum_0^{n-1} m_i \rho_i = at + b, \tag{1.5}$$

$$\sum_0^{n-1} m_i \left(\rho_i \times \frac{d\rho_i}{dt}\right) = c, \tag{1.6}$$

где a, b и c — постоянные векторы, определяемые начальными условиями, т. е. положениями и скоростями точек системы для некоторого момента времени.

Если равенства (1.5) написать в координатной форме, то получим

$$\sum_0^{n-1} m_i \dot{\xi}_i = a_\xi; \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\eta}_i = a_\eta; \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\zeta}_i = a_\zeta, \tag{1.7}$$

$$\sum_0^{n-1} m_i \xi_i = a_\xi t + b_\xi; \quad \sum_0^{n-1} m_i \eta_i = a_\eta t + b_\eta; \quad \sum_0^{n-1} m_i \zeta_i = a_\zeta t + b_\zeta, \tag{1.8}$$

где a_ξ, a_η, a_ζ и b_ξ, b_η, b_ζ — компоненты векторов a и b. Это дает шесть первых интегралов уравнений (1.2).

Обозначив через X, Y, Z координаты центра инерции, а через $M = m_0 + m_1 + \ldots + m_{n-1}$ сумму масс, равенства (1.8) можно написать так:

$$MX = a_\xi t + b_\xi;\quad MY = a_\eta t + b_\eta;\quad MZ = a_\zeta t + b_\zeta. \tag{1.9}$$

Интегралы (1.7) и (1.8), показывающие, что центр инерции системы движется прямолинейно и равномерно, носят название *интегралов движения центра инерции*. Их называют также *интегралами сохранения импульса* (или количества движения).

Равенство (1.6), будучи написано в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} &\sum_0^{n-1} m_i(\eta_i\dot\zeta_i - \zeta_i\dot\eta_i) = c_\xi,\\ &\sum_0^{n-1} m_i(\zeta_i\dot\xi_i - \xi_i\dot\zeta_i) = c_\eta,\\ &\sum_0^{n-1} m_i(\xi_i\dot\eta_i - \eta_i\dot\xi_i) = c_\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

дает три первых интеграла уравнений (1.2). Эти интегралы называются *интегралами сохранения вращательного импульса* (или момента количества движения). Каждое из выражений, стоящих в равенстве (1.6) в скобках, является удвоенной секторной скоростью соответствующей массы. Таким образом, интегралы (1.10) выражают постоянство взвешенного среднего секторных скоростей точек системы. Поэтому их называют также *интегралами площадей*.

Если от системы координат $O\xi\eta\zeta$ перейти к новой системе $O\xi'\eta'\zeta'$, для которой ось $O\zeta'$ совпадает с вектором $\boldsymbol{c}$, то в интегралах (1.10), написанных в этой новой системе, будем иметь

$$c_{\xi'} = 0,\quad c_{\eta'} = 0,\quad c_{\zeta'} = |\boldsymbol{c}| = c.$$

Таким образом, новая координатная плоскость $\zeta' = 0$ обладает тем свойством, что взвешенное среднее секторных скоростей проекций точек m_i на эту плоскость является наибольшим. Эта плоскость перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{c}$, а потому в силу (1.10) она вполне определяется начальными условиями движения, если только вектор $\boldsymbol{c}$ не равен нулю. Ее называют *неизменной плоскостью системы по отношению к точке* O. При изменении начала координат O величины (1.10) изменяются, а следовательно, изменяется и положение неизменной плоскости.

Девять первых интегралов (1.7), (1.8) и (1.10) являются следствиями законов сохранения количества движения и количества вращения, которым подчиняется каждая замкнутая система материальных точек. Так как рассматриваемая нами система консервативна (поскольку существует однозначная силовая функция, не зависящая от времени), то она подчиняется еще закону сохранения механической энергии. Поскольку энергия — величина скалярная, это дает только один первый интеграл. Чтобы его найти, надо умножить уравнения (1.4) соответственно на $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ и почленно сложить. Это дает

$$\sum_{0}^{n-1} m_i(\dot{\xi}_i\ddot{\xi}_i + \dot{\eta}_i\ddot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i\ddot{\zeta}_i) = \frac{dU}{dt},$$

откуда, интегрируя и обозначая через

$$T = \frac{1}{2}\sum_{0}^{n-1} m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2)$$

кинетическую энергию системы, получим и н т е г р а л э н е р г и и

$$T - U = h. \tag{1.11}$$

Постоянная интегрирования h называется п о с т о я н н о й э н е р г и и. Движения системы, для которых h имеет одно и то же значение, называются и з о э н е р г е т и ч е с к и м и.

Так как потенциальная энергия рассматриваемой системы равна — U, то равенство (1.11), в силу которого полная энергия $H = T - U$ остается в каждом движении постоянной, выражает закон сохранения энергии.

Если начало координат перенести в центр инерции системы, то вид уравнений (1.2) не изменится. Не изменится, следовательно, и форма первых интегралов, но постоянные интегрирования изменятся. Соответствующее значение h будем называть б а р и ц е н т р и ч е с к о й п о с т о я н н о й э н е р г и и. Неизменную плоскость, соответствующую этому случаю, будем называть б а р и ц е н т р и ч е с к о й н е и з м е н н о й п л о с к о с т ь ю или п л о с к о с т ь ю Л а п л а с а. Она была открыта в 1789 г. Лапласом, отметившим преимущества ее в качестве основной координатной плоскости при изучении планетных движений.

Итак, самые общие теоремы механики дают для задачи нескольких тел, выражаемой уравнениями (1.2), десять первых интегралов. Уже из самого происхождения этих интегралов видно, что они, имея место для весьма широких классов механических систем, не связаны с какими-либо специфическими свойствами закона Ньютона. Эти интегралы не дают, таким образом, возможности проникнуть сколько-нибудь глубоко в сущность рассматриваемой задачи.

В 1887 г. Брунс доказал, что даже в случае задачи трех тел всякий первый интеграл, алгебраический относительно координат ξ_i, η_i, ζ_i и их производных $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$, является следствием указанных десяти интегралов *). Этот результат вскрыл причину безуспешности столь многочисленных попыток продвинуть дальше решение задачи нескольких тел путем нахождения новых интегралов.

Решение задачи n тел, эквивалентное интегрированию системы (1.2) порядка $6n$, при помощи найденных нами интегралов приводится к интегрированию системы порядка $6n-10$. Порядок системы может быть понижен еще на две единицы, но после интегрирования полученной системы порядка $6n-12$ для полного решения задачи нужно будет выполнить еще две квадратуры.

В самом деле, воспользовавшись тем, что дифференциальные уравнения содержат время только в форме дифференциала dt, мы можем исключить из них dt. Это даст систему порядка $6n-11$ и выражение dt через координаты. После того как система порядка $6n-11$ будет решена, квадратура выражения для dt даст зависимость между временем и координатами.

Понижение порядка системы еще на одну единицу основывается на полном использовании того обстоятельства, что силы зависят исключительно от взаимных расстояний движущихся точек.

Чтобы удобнее использовать указанное свойство нашей системы, перейдем к обобщенным координатам, причем одну из координат выберем следующим образом. Через какую-либо точку системы, например, m_0, проведем неподвижную прямую, а через эту прямую — плоскость, проходящую через какую-нибудь другую точку системы. Азимут этой плоскости, отсчитываемый от произвольного неподвижного направления, обозначим через φ и примем за одну из обобщенных координат.

Движение всей системы будет, следовательно, определяться координатой φ и координатами, фиксирующими положение системы относительно движущейся плоскости, имеющей азимут φ.

Покажем, что координата φ является циклической, т. е. что уравнения Лагранжа заключают только производную $\dot{\varphi}$, но не φ.

Неподвижную прямую, проведенную нами через точку m_0, примем за ось z; ось x расположим во вращающейся плоскости. Если через x_k, y_k, z_k обозначить координаты точки m_k в этой

---

*) Пуанкаре (1889) и Пенлеве (1897) обобщили эти результаты, доказав отсутствие значительно более широких классов первых интегралов.

Исследования Брунса и Пуанкаре подробно изложены Уиттекером [1937].

Нужно, однако, иметь в виду, что во всех этих работах массы рассматриваются не как фиксированные величины, а как переменные параметры; координаты тел предполагаются аналитическими функциями масс [Винтнер, 1941].

вращающейся системе осей, то компоненты скорости точки m_k будут

$$\dot{x}_k - \dot{\varphi} y_k, \quad \dot{y}_k + \dot{\varphi} x_k, \quad \dot{z}_k.$$

Следовательно, кинетическая энергия системы, определяемая равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left[(\dot{x}_k - \dot{\varphi} y_k)^2 + (\dot{y}_k + \dot{\varphi} x_k)^2 + \dot{z}_k^2\right]$$

будет зависеть только от $\dot{\varphi}$, но не от φ, точно так же, как и кинетический потенциал

$$L = T + U.$$

Поэтому соответствующее φ уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

дает

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}.$$

Это равенство позволяет исключить $\dot{\varphi}$ из остальных уравнений движения. После того как полученная таким образом система уравнений будет проинтегрирована и будет известно движение наших материальных точек относительно вращающейся плоскости, останется найти угол φ, дающий положение этой плоскости. Так как последнее равенство дает $\dot{\varphi}$ в функции остальных координат, то угол φ найдется при помощи одной квадратуры.

Операцию исключения из уравнений движения азимута можно для краткости назвать *исключением узлов*, так как она является, по существу, обобщением свойства, получившего название исключения узлов в задаче трех тел (см. § 5).

Итак, при помощи десяти элементарных интегралов, исключения времени и исключения узлов, решение задачи n тел приводится к интегрированию системы порядка $6n-12$ и двум квадратурам.

Это понижение порядка дает полное решение задачи двух тел. Здесь одна из заключительных квадратур дает абсолютную ориентацию орбиты, а другая дает уравнение Кеплера, являющееся выражением времени через координаты.

То, что решение задачи трех тел может быть приведено к интегрированию системы шестого порядка, было впервые показано Лагранжем в 1772 г. В 1842 г. Якоби выяснил, что источником этой редукции является то обстоятельство, что силы зависят только от взаимных расстояний.

Подробные сведения по вопросам редукции задачи нескольких тел, а также литературные указания дают Марколонго [1919], Уиттекер [1937] и Хагихара [1944].

§ 2. Движение солнечной системы

Интегралы сохранения импульса (1.7) используются для нахождения движения Солнца относительно центра инерции определенной группы звезд, включающей и само Солнце.

Так как центр инерции такой группы звезд мы можем считать неподвижным, то для рассматриваемой группы тел $a_\xi = a_\eta = a_\zeta = 0$. Следовательно,

$$\sum_0^{n-1} m_i \dot{\xi}_i = 0, \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\eta}_i = 0, \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\zeta}_i = 0.$$

Относя индекс 0 к Солнцу и полагая

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0,$$

получим

$$M\dot{\xi}_0 + \sum_1^{n-1} m_i \dot{x}_i = 0, \ldots$$

Эти уравнения дают возможность найти скорость $\{\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0\}$ солнечной системы относительно центра инерции выбранной группы звезд. В этом заключается метод, предложенный Бравэ (A. Bravais) в 1843 г. Успешное применение этого метода стало, однако, возможным лишь в XX в., когда были получены достаточные сведения относительно лучевых скоростей и масс звезд. До этого сведения о движении солнечной системы получались лишь при помощи чисто геометрических способов, основанных на использовании одних только собственных движений звезд.

Относительно центра инерции ярких звезд (приблизительно до 6-й величины), для которых имеются наиболее полные данные, солнечная система движется в направлении, определяемом прямым восхождением 270° и склонением +30°, со скоростью 19,5 *км/сек*.

§ 3. Плоскость Лапласа

Интегралы площадей (1.10) и вытекающее из них существование неизменной плоскости были открыты Лапласом в 1789 г.

Он указал также на возможность использования барицентрической неизменной плоскости (получившей название плоскости Лапласа) в качестве основной координатной плоскости при изучении движений тел солнечной системы за очень большие промежутки времени. Плоскости эклиптики и экватора, являющиеся