Подробные сведения по вопросам редукции задачи нескольких тел, а также литературные указания дают Марколонго [1919], Уиттекер [1937] и Хагихара [1944].

§ 2. Движение солнечной системы

Интегралы сохранения импульса (1.7) используются для нахождения движения Солнца относительно центра инерции определенной группы звезд, включающей и само Солнце.

Так как центр инерции такой группы звезд мы можем считать неподвижным, то для рассматриваемой группы тел $a_\xi = a_\eta = a_\zeta = 0$. Следовательно,

$$\sum_0^{n-1} m_i \dot{\xi}_i = 0, \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\eta}_i = 0, \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\zeta}_i = 0.$$

Относя индекс 0 к Солнцу и полагая

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0,$$

получим

$$M\dot{\xi}_0 + \sum_1^{n-1} m_i \dot{x}_i = 0, \ldots$$

Эти уравнения дают возможность найти скорость $\{\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0\}$ солнечной системы относительно центра инерции выбранной группы звезд. В этом заключается метод, предложенный Бравэ (A. Bravais) в 1843 г. Успешное применение этого метода стало, однако, возможным лишь в XX в., когда были получены достаточные сведения относительно лучевых скоростей и масс звезд. До этого сведения о движении солнечной системы получались лишь при помощи чисто геометрических способов, основанных на использовании одних только собственных движений звезд.

Относительно центра инерции ярких звезд (приблизительно до 6-й величины), для которых имеются наиболее полные данные, солнечная система движется в направлении, определяемом прямым восхождением 270° и склонением +30°, со скоростью 19,5 *км/сек*.

§ 3. Плоскость Лапласа

Интегралы площадей (1.10) и вытекающее из них существование неизменной плоскости были открыты Лапласом в 1789 г.

Он указал также на возможность использования барицентрической неизменной плоскости (получившей название плоскости Лапласа) в качестве основной координатной плоскости при изучении движений тел солнечной системы за очень большие промежутки времени. Плоскости эклиптики и экватора, являющиеся основными в обычно употребляемых координатных системах, непрерывно меняют свое положение. Для того чтобы использовать современные наблюдения через несколько тысяч лет, придется учесть перемещение этих плоскостей за очень большой промежуток времени, что неизбежно повлечет потерю точности. Фиксация современной экваториальной (или эклиптической) координатной системы при помощи отнесенных к ней положений звезд тоже не позволит, по причине сложности движений звезд, совершенно точно связать эту координатную систему с той, к которой будут отнесены наблюдения через тысячи лет. Наоборот, координатная система, базирующаяся на плоскости Лапласа, должна, казалось бы, быть свободной от такого недостатка, поскольку эта плоскость сохраняет неизменное положение.

Ближайшее рассмотрение показывает, однако, что употребление плоскости Лапласа в качестве основной связано со своими трудностями, как практическими, так и принципиальными.

Обозначим через $(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i, \mathrm{z}_i)$ барицентрические координаты тела, имеющего массу m_i. Тогда

$$\xi_i = X + \mathrm{x}_i, \qquad \eta_i = Y + \mathrm{y}_i, \qquad \zeta_i = Z + \mathrm{z}_i.$$

Формулы (1.9) показывают, что дифференциальные уравнения, определяющие новые координаты, имеют такой же вид, как уравнения (1.2). Отсюда следует, что и интегралы будут иметь такой же вид. Поэтому компоненты вращательного импульса системы в барицентрическом движении будут иметь вид

$$c_{\mathrm{x}} = \sum m_i (\mathrm{y}_i \dot{\mathrm{z}}_i - \mathrm{z}_i \dot{\mathrm{y}}_i), \ \ldots, \tag{3.1}$$

аналогичный (1.10).

Формулы (3.1), заключающие лишь относительные координаты, могут служить для вычисления величин c_{x}, c_{y}, c_{z}, определяющих положение плоскости Лапласа. Но совершенно строгое применение этих формул требует распространения суммирования в правых частях на все материальные частицы, из которых состоит солнечная система. Так как это практически невозможно, то формулы (3.1) приходится заменить другими.

Будем рассматривать солнечную систему как совокупность не отдельных частиц, а некоторого числа твердых тел. Обозначим через m массу одного из таких тел, через I — момент инерции, а через $\{\omega_{\mathrm{x}}, \omega_{\mathrm{y}}, \omega_{\mathrm{z}}\}$ — угловую скорость вращения. Пусть, далее, x, y, z — барицентрические координаты центра инерции этого тела.

В таком случае вместо формул (3.1) будем иметь

$$c_{\mathrm{x}} = \sum I\omega_{\mathrm{x}} + \sum m(\mathrm{y}\dot{\mathrm{z}} - \mathrm{z}\dot{\mathrm{y}}), \ \ldots, \tag{3.2}$$

где суммирование распространяется на все тела, составляющие солнечную систему.

Первые суммы в правых частях этих формул, обусловленные вращением небесных тел около их осей, нам известны недостаточно. Поэтому эти суммы приходится рассматривать как постоянные и, вместо «динамической плоскости Лапласа», определяемой формулами (3.1), пользоваться «астрономической плоскостью Лапласа», положение которой определяется величинами

$$c'_x = \sum m(y\dot{z} - z\dot{y}), \ldots \tag{3.3}$$

Астрономическая плоскость Лапласа была бы неподвижна в пространстве только в том случае, если бы все тела, составляющие солнечную систему, были абсолютно тверды и имели бы строго сферическую структуру. Так как это не имеет места, то поступательные и вращательные движения тел солнечной системы оказываются взаимно зависимыми. Например, вращение Земли зависит от движения Луны и Солнца (прецессия и нутация), и обратно, на движение этих тел влияет отклонение Земли от строго сферической структуры, а следовательно, и ее вращение. Более того, поскольку небесные тела не являются абсолютно твердыми, деформации их, вызываемые взаимным притяжением, приводят к преобразованию механической энергии в другие виды энергии.

В результате, положение астрономической плоскости Лапласа не остается строго постоянным, причем ее перемещения не могут быть строго учтены. Все это показывает, что базирующаяся на ней координатная система не имеет преимущества перед общеупотребительной с точки зрения строгого сопоставления современных наблюдений небесных тел с теми, которые будут получены через десятки и сотни тысяч лет.

Однако плоскость Лапласа имеет весьма большое значение в вопросах, связанных с изучением структуры и эволюции солнечной системы. Эта плоскость, положение которой не могло значительно меняться в течение очень больших интервалов времени, сохраняет много ценных сведений о прошлом солнечной системы.

По вычислениям Клеменса и Брауэра [1955] положение астрономической плоскости Лапласа относительно эклиптики и равноденствия 1950,0 определяется элементами

$$\Omega = 107°13'47'',6; \qquad I = 1°39'13'',96,$$

если для масс планет взять значения Ньюкома, принятые в астрономических ежегодниках.

Эти элементы принимают значения

$$\Omega = 107°13',3 \pm 2',1; \qquad I = 1°38'49'' \pm 22'',$$

если для масс взять наиболее надежные значения и учесть средние ошибки этих значений.