§ 4. Первая форма уравнений относительного движения

Во всех применениях, которые задача нескольких тел находит в теоретической астрономии, представляют интерес не абсолютные координаты (т. е. координаты по отношению к любой инерциальной системе), а координаты относительные, определяющие взаимное расположение движущихся тел. В зависимости от характера проблемы относительные координаты могут быть выбраны различно. Одной из важнейших форм относительных координат является следующая.

Возьмем новую систему координат, начало которой находится в точке с массой m_0, а оси — параллельны осям рассматривавшейся выше системы. Если новые координаты точки m_i обозначить через x_i, y_i, z_i, то

$$\xi_i = \xi_0 + x_i, \quad \eta_i = \eta_0 + y_i, \quad \zeta_i = \zeta_0 + z_i. \tag{4.1}$$

Уравнения (1.2) дают

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = k^2 \sum_0^{n-1}{}^{(i)} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} = -k^2 m_0 \frac{x_i}{r_{0i}^3} + k^2 \sum_0^{n-1}{}^{(0,\, i)} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},$$

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = k^2 \sum_0^{n-1}{}^{(0)} m_j \frac{x_j - x_0}{r_{0j}^3} = k^2 m_i \frac{x_i}{r_{0i}^3} + k^2 \sum_0^{n-1}{}^{(0,\, i)} m_j \frac{x_j}{r_{0j}^3},$$

где у каждого знака суммы сверху показано, какие значения индексов пропускаются при суммировании.

Положив для краткости $r_{0i} = r_i$ и вычтя второе равенство из первого, получим

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -k^2 (m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} + k^2 \sum_0^{n-1}{}^{(0,\, i)} m_j \left(\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right),$$

причем

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2; \quad r_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2.$$

Эти уравнения, совместно с аналогичными для двух других координат, определяют движение точек m_1, m_2, ..., m_{n-1} относительно точки m_0.

Полагая

$$R_i = k^2 \sum_1^{n-1}{}^{(i)} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right), \tag{4.2}$$

полученные уравнения можно написать так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_i}{dt^2}+k^2(m_0+m_i)\frac{x_i}{r_i^3}&=\frac{\partial R_i}{\partial x_i},\\ \frac{d^2y_i}{dt^2}+k^2(m_0+m_i)\frac{y_i}{r_i^3}&=\frac{\partial R}{\partial y_i},\\ \frac{d^2z_i}{dt^2}+k^2(m_0+m_i)\frac{z_i}{r_i^3}&=\frac{\partial R_i}{\partial z_i}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Если массы всех тел, за исключением m_0 и m_i, равны нулю, то $R_i=0$ и уравнения (4.3) обращаются в уравнения задачи двух тел (§ 2 гл. III). Так как кеплерово движение, имеющее место в задаче двух тел, принято называть невозмущенным, а всякое отклонение от такого движения — возмущением, то функция R_i, наличие которой вызывает возмущение, получила название пертурбационной функции. Производные R_i по координатам точки m_i дают компоненты ускорения, испытываемого телом m_i в его относительном движении со стороны всех других тел, за исключением тела m_0, принятого за начало координат.

Уравнения (4.3) широко применяются в астрономии. Так как они являются основой теории движения планет, то их иногда называют планетной формой уравнений относительного движения. При изучении гелиоцентрического движения планет за центральное тело принимают Солнце. В этом случае каждая пертурбационная функция (4.2) очень мала, так как она состоит из членов, имеющих множителями планетные массы; следовательно, правые части уравнений (4.3) будут весьма малы, и их влияние действительно целесообразно рассматривать как возмущения.

Система (4.3) порядка $6n-6$ может рассматриваться как результат исключения при помощи интегралов (1.7) и (1.8) из системы (1.2) порядка $6n$ шести величин ξ_0, η_0, ζ_0, $\dot\xi_0$, $\dot\eta_0$, $\dot\zeta_0$. Если известны постоянные интегрирования, входящие в (1.7) и (1.8), то после разрешения системы (4.3) могут быть найдены и абсолютные координаты. Действительно, подстановка выражений (4.1) в равенства (1.8) дает

$$M\xi_0+\sum_1^{n-1} m_i x_i = a_\xi t + b_\xi, \ \ldots, \tag{4.4}$$

откуда можно найти ξ_0, η_0, ζ_0, после чего соотношения (4.1) дадут абсолютные координаты всех остальных точек.

Уравнения (4.3) имеют четыре алгебраических первых интеграла, легко получаемых из соотношений (1.10) и (1.11) при помощи подстановки (4.1) и последующего исключения ξ_0, η_0, ζ_0 при помощи равенств (4.4).