§ 5. Вторая форма уравнений относительного движения

Указанная в предыдущем параграфе форма уравнений относительного движения в некоторых случаях неудобна тем, что содержит особую для каждого тела пертурбационную функцию R_i. Поэтому иногда пользуются другой формой, основанной на следующем выборе относительных координат:

1) через первую точку m_0 проводим оси координат, параллельные неподвижным осям, и положение m_1 определяем в этой системе координатами x_1, y_1, z_1;

2) через центр инерции G_1 точек m_0 и m_1 проводим оси, параллельные предыдущим, и положение m_2 определяем относительно этих осей координатами x_2, y_2, z_2;

3) положение m_3 определяем координатами x_3, y_3, z_3 относительно системы осей, параллельных предыдущим и имеющим начало в центре инерции G_2 точек m_0, m_1, m_2 и т. д.

Таким образом, каждая последующая точка m_{i+1} относится к центру инерции G_i всех предыдущих точек m_0, m_1, ..., m_i.

Обозначим через X_i, Y_i, Z_i координаты точки G_i, так что

$$M_iX_i = m_0\xi_0 + m_1\xi_1 + \ldots + m_i\xi_i,$$

где

$$M_i = m_0 + m_1 + \ldots + m_i.$$

По определению,

$$x_i = \xi_i - X_{i-1},$$

откуда

$$M_{i-1}x_i = M_{i-1}\xi_i - (m_0\xi_0 + m_1\xi_1 + \ldots + m_{i-1}\xi_{i-1}). \tag{5.1}$$

Чтобы выразить старые координаты ξ, η, ζ через новые x, y, z, заметим прежде всего, что

$$M_iX_i - M_{i-1}X_{i-1} = m_i\xi_i,$$

или

$$M_iX_i - M_{i-1}X_{i-1} = (M_i - M_{i-1})\xi_i. \tag{5.2}$$

Следовательно,

$$M_i(\xi_{i+1} - x_{i+1}) - M_{i-1}(\xi_i - x_i) = (M_i - M_{i-1})\xi_i,$$

откуда

$$\xi_{i+1} - \xi_i = x_{i+1} - M_{i-1}M_i^{-1}x_i.$$

Складывая почленно эти равенства для последовательных значений индекса, получим

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 - \xi_0 = x_1, \\ &\xi_{i+1} - \xi_0 = x_{i+1} + \frac{m_i x_i}{M_i} + \frac{m_{i-1}x_{i-1}}{M_{i-1}} + \ldots + \frac{m_1 x_1}{M_1}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Перейдем теперь к составлению дифференциальных уравнений движения в новых координатах.

Дифференцируя дважды равенство (5.1) и пользуясь уравнениями (1.4), получим

$$M_{i-1}\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{M_{i-1}}{m_i}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}-\frac{\partial U}{\partial\xi_0}-\frac{\partial U}{\partial\xi_1}-\ldots-\frac{\partial U}{\partial\xi_{i-1}}. \tag{5.4}$$

С другой стороны имеем, на основании соотношения (5.1),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial\xi_0}&=-\frac{\partial U}{\partial x_1}-\frac{m_0}{M_1}\frac{\partial U}{\partial x_2}-\frac{m_0}{M_2}\frac{\partial U}{\partial x_3}-\ldots-\frac{m_0}{M_{n-2}}\frac{\partial U}{\partial x_{n-1}},\\
\frac{\partial U}{\partial\xi_1}&=\frac{\partial U}{\partial x_1}-\frac{m_1}{M_1}\frac{\partial U}{\partial x_2}-\frac{m_1}{M_2}\frac{\partial U}{\partial x_3}-\ldots-\frac{m_1}{M_{n-2}}\frac{\partial U}{\partial x_{n-1}},\\
\frac{\partial U}{\partial\xi_2}&=\frac{\partial U}{\partial x_2}-\frac{m_2}{M_2}\frac{\partial U}{\partial x_3}-\ldots-\frac{m_2}{M_{n-2}}\frac{\partial U}{\partial x_{n-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial U}{\partial\xi_{n-1}}&=\frac{\partial U}{\partial x_{n-1}},
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\frac{M_{i-1}}{m_i}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}&=\frac{M_{i-1}}{m_i}\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{M_{i-1}}{M_i}\frac{\partial U}{\partial x_{i+1}}-\ldots-\frac{M_{i-1}}{M_{n-2}}\frac{\partial U}{\partial x_{n-1}},\\
\sum_0^{i-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_k}&=-\frac{M_{i-1}}{M_{i-1}}\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{M_{i-1}}{M_i}\frac{\partial U}{\partial x_{i+1}}-\ldots-\frac{M_{i-1}}{M_{n-2}}\frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (5.4), окончательно будем иметь следующие дифференциальные уравнения:

$$\mu_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i};\quad \mu_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i};\quad \mu_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i}, \tag{5.5}$$

где

$$\mu_i=\frac{m_iM_{i-1}}{M_i},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Равенства (5.3) позволяют выразить силовую функцию U через новые относительные координаты.

При теоретических исследованиях уравнения (5.4) часто оказываются более удобными, нежели уравнения (4.3), рассмотренные в предыдущем параграфе. Это связано прежде всего с возможностью непосредственного преобразования уравнений (5.5) в каноническую систему. Действительно, положив

$$\left.\begin{aligned}
&q_{3i-2}=x_i; && q_{3i-1}=y_i; && q_{3i}=z_i,\\
&p_{3i-2}=\mu_i\dot q_{3i-2}; && p_{3i-1}=\mu_i\dot q_{3i-1}; && p_{3i}=\mu_i\dot q_{3i}
\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

получим

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}, \tag{5.7}$$

где

$$H=\sum_{1}^{n-1}\frac{1}{2\mu_i}\left(p_{3i-2}^2+p_{3i-1}^2+p_{3i}^2\right)-U.$$

Помимо теоретических исследований уравнения (5.5) или (5.7) находят также широкое применение в теории движения спутников и при изучении движений в системах кратных звезд. Например, в теории движения Луны удобно за тело m_0 принять Землю, за m_1 — Луну, за m_2 — Солнце. Движение Солнца относительно центра инерции системы Земля — Луна мы можем считать эллиптическим (§ 2, гл. XXI), следовательно, нахождение x_2, y_2, z_2 сводится к решению задачи двух тел, чем существенно упрощается нахождение геоцентрических координат Луны x_1, y_1, z_1, приводящееся к интегрированию системы шестого порядка.

Рассмотренные в этом параграфе относительные координаты, введенные впервые Якоби в 1842 г., носят название *якобиевых* или *канонических*. Уравнения движения в этих координатах (5.5) иногда называют *симметричной* (а также — *спутниковой* или *звездной*) формой уравнений относительного движения.

В заключение покажем, что для уравнений (5.5) интегралы площадей и интеграл энергии имеют ту же форму, как и для уравнений абсолютного движения, рассмотренных в § 1.

Равенство (5.2) после замены ξ_i через x_i+X_{i-1} дает

$$m_i x_i=M_i(X_i-X_{i-1}).$$

Возведем почленно в квадрат это равенство и равенство (5.2). Это даст

$$m_i^2x_i^2=M_i^2(X_i-2X_iX_{i-1}+X_{i-1}^2),$$
$$m_i^2\xi_i^2=M_i^2X_i^2-2M_iM_{i-1}X_iX_{i-1}+M_{i-1}^2X_{i-1}^2,$$

откуда после исключения произведения X_iX_{i-1}

$$m_i\left(\xi_i^2-M_{i-1}M_i^{-1}x_i^2\right)=M_iX_i^2-M_{i-1}X_{i-1}^2.$$

Суммирование от $i=1$ до $i=n-1$ дает

$$\sum_{1}^{n-1}m_i\xi_i^2=\sum_{1}^{n-1}m_iM_{i-1}M_i^{-1}x_i^2+M_{n-1}X_{n-1}^2-M_0X_0^2$$

или, поскольку $M_0=m_0$, $X_0=\xi_0$, $M_{n-1}=M$, $X_{n-1}=X$,

$$\sum_{0}^{n-1}m_i\xi_i^2=\sum_{1}^{n-1}\mu_ix_i^2+MX^2.$$

Сложив это равенство с аналогичными, написанными для других координат, будем иметь следующее интересное соотношение:

$$\sum_{0}^{n-1} m_i(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2)=\sum_{1}^{n-1} \mu_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)+M(X^2+Y^2+Z^2).$$

Полученное соотношение является следствием линейных и однородных зависимостей, существующих между старыми координатами ξ, η, ζ и новыми x, y, z. Если бы исходные зависимости были предварительно продифференцированы по времени, то мы получили бы равенство

$$\sum_{0}^{n-1} m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2)=\sum_{1}^{n-1} \mu_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)+M(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2).$$

Отсюда следует, что интеграл энергии для уравнений (5.5) имеет ту же самую форму

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{n-1}\mu_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)=U+h',$$

как и интеграл (1.11) для уравнений (1.4).

Легко проверяемое тождество

$$\sum_{0}^{n-1} m_i(\xi_i\dot{\eta}_i-\eta_i\dot{\xi}_i)=\sum_{1}^{n-1} \mu_i(x_i\dot{y}_i-y_i\dot{x}_i)+M(X\dot{Y}-Y\dot{X})$$

показывает, что интегралы площадей имеют здесь в силу соотношений (1.9) и (1.10) ту же самую форму как и для уравнений (1.2), а именно,

$$\sum_{1}^{n-1} \mu_i(x_i\dot{y}_i-y_i\dot{x}_i)=\gamma_x, \ \dots \tag{5.8}$$

Примечание. Интересным следствием интегралов (5.8) является найденная Якоби «теорема исключения узлов».

Плоскость орбиты, описываемой телом m_1 относительно m_0, и плоскость орбиты, описываемой m_2 по отношению к центру инерции m_0 и m_1, пересекаются по прямой, параллельной плоскости Лапласа.

В самом деле, плоскость первой из этих орбит проходит через начало координат m_0, точку x_1, y_1, z_1, и бесконечно близкую к ней точку $x_1+\dot{x}_1dt$, $y_1+\dot{y}_1dt$, $z_1+\dot{z}_1dt$. Поэтому уравнение этой плоскости можно написать так:

$$x(y_1\dot{z}_1-z_1\dot{y}_1)+y(z_1\dot{x}_1-x_1\dot{z}_1)+z(x_1\dot{y}_1-y_1\dot{x}_1)=0. \tag{5.9}$$

Точно так же найдем, что уравнение плоскости орбиты, описываемой m_2 относительно центра инерции m_0 и m_1, имеет вид

$$x(y_2\dot{z}_2-z_2\dot{y}_2)+y(z_2\dot{x}_2-x_2\dot{z}_2)+z(x_2\dot{y}_2-y_2\dot{x}_2)=0. \tag{5.10}$$

После умножения этих уравнений соответственно на μ_1 и μ_2 сложим их почленно. На основании (5.8) это даст

$$\gamma_x x+\gamma_y y+\gamma_z z=0,$$

т. е. уравнение плоскости, параллельной плоскости Лапласа.

Таким образом, прямая пересечения плоскостей (5.9) и (5.10) действительно параллельна плоскости Лапласа.

§ 6. Формула Лагранжа — Якоби

Так как силовая функция U, определяемая формулой (1.3), является однородной функцией (—1)-го порядка от координат, то по известной теореме Эйлера

$$\sum\left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i}+\eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i}+\zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\right)=-U. \tag{6.1}$$

Следовательно, умножив уравнения (1.4) соответственно на ξ_i, η_i, ζ_i, сложив их почлеино и просуммировав результат от $i=0$ до $i=n-1$, получим

$$\sum_0^{n-1} m_i(\xi_i\ddot{\xi}_i+\eta_i\ddot{\eta}_i+\zeta_i\ddot{\zeta}_i)=-U.$$

Это равенство сложим с интегралом энергии (1.11), умноженным предварительно на 2. Это даст

$$\sum_0^{n-1} m_i(\xi_i\ddot{\xi}_i+\ldots+\dot{\xi}_i^2+\ldots)=U+2h,$$

или

$$\frac{d}{dt}\sum_0^{n-1} m_i(\xi_i\dot{\xi}_i+\eta_i\dot{\eta}_i+\zeta_i\dot{\zeta}_i)=U+2h,$$

или, наконец,

$$\frac{d^2J}{dt^2}=2U+4h. \tag{6.2}$$

Стоящая здесь сумма

$$J=\sum_0^{n-1} m_i(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2)$$

есть момент инерции нашей системы относительно начала координат.

Разность между J и величиной

$$J_0=M(X^2+Y^2+Z^2),$$

где $M=\sum m_i$, а через X, Y, Z обозначены координаты центра инерции, может быть выражена через квадраты взаимных расстояний точек системы.