После умножения этих уравнений соответственно на μ_1 и μ_2 сложим их почленно. На основании (5.8) это даст

$$\gamma_x x+\gamma_y y+\gamma_z z=0,$$

т. е. уравнение плоскости, параллельной плоскости Лапласа.

Таким образом, прямая пересечения плоскостей (5.9) и (5.10) действительно параллельна плоскости Лапласа.

§ 6. Формула Лагранжа — Якоби

Так как силовая функция U, определяемая формулой (1.3), является однородной функцией (—1)-го порядка от координат, то по известной теореме Эйлера

$$\sum\left(\xi_i\frac{\partial U}{\partial\xi_i}+\eta_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i}+\zeta_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}\right)=-U. \tag{6.1}$$

Следовательно, умножив уравнения (1.4) соответственно на ξ_i, η_i, ζ_i, сложив их почлеино и просуммировав результат от $i=0$ до $i=n-1$, получим

$$\sum_0^{n-1} m_i(\xi_i\ddot{\xi}_i+\eta_i\ddot{\eta}_i+\zeta_i\ddot{\zeta}_i)=-U.$$

Это равенство сложим с интегралом энергии (1.11), умноженным предварительно на 2. Это даст

$$\sum_0^{n-1} m_i(\xi_i\ddot{\xi}_i+\ldots+\dot{\xi}_i^2+\ldots)=U+2h,$$

или

$$\frac{d}{dt}\sum_0^{n-1} m_i(\xi_i\dot{\xi}_i+\eta_i\dot{\eta}_i+\zeta_i\dot{\zeta}_i)=U+2h,$$

или, наконец,

$$\frac{d^2J}{dt^2}=2U+4h. \tag{6.2}$$

Стоящая здесь сумма

$$J=\sum_0^{n-1} m_i(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2)$$

есть момент инерции нашей системы относительно начала координат.

Разность между J и величиной

$$J_0=M(X^2+Y^2+Z^2),$$

где $M=\sum m_i$, а через X, Y, Z обозначены координаты центра инерции, может быть выражена через квадраты взаимных расстояний точек системы.

В самом деле, возьмем следующее очевидное тождество:

$$\sum_j m_j \sum_i m_i \xi_i^2 = \sum_i m_i^2 \xi_i^2 + S m_i m_j (\xi_i^2 + \xi_j^2),$$

где буквой S обозначено суммирование, при котором каждая комбинация индексов берется только один раз и случай $i=j$ исключается.

С другой стороны,

$$\left(\sum m_i \xi_i\right)^2 = \sum m_i^2 \xi_i^2 + 2S m_i m_j \xi_i \xi_j,$$

а вычитание этого равенства из предыдущего дает

$$M \sum m_i \xi_i^2 - \left(\sum m_i \xi_i\right)^2 = S m_i m_j (\xi_j - \xi_i)^2. \tag{6.3}$$

Сложив это тождество с двумя аналогичными для η и ζ, и учитывая, что

$$\sum m_i \xi_i = MX; \quad \sum m_i \eta_i = MY; \quad \sum m_i \zeta_i = MZ,$$

получим искомый результат:

$$MJ = MJ_0 + R^2,$$

где

$$R^2 = S m_i m_j r_{ij}^2. \tag{6.4}$$

Подстановка этого выражения для J в равенство (6.2) дает, если учесть (1.9),

$$\frac{d^2 (R^2)}{dt^2} = 2MU + 4Mh_0. \tag{6.5}$$

Через h_0 здесь обозначена новая постоянная, определяемая равенством

$$2Mh_0 = 2Mh - a_\xi^2 - a_\eta^2 - a_\zeta^2. \tag{6.6}$$

Если за начало координат принять центр инерции, то $X = Y = Z = 0$, а потому $J_0 = 0$; $a_\xi = a_\eta = a_\zeta = 0$; $h = h_0$.

Таким образом, h_0 есть барицентрическая постоянная энергии.

Формулу (6.2), так же как и эквивалентную ей формулу (6.5), будем называть формулой Лагранжа—Якоби. Она является обобщением уже встречавшейся нам в задаче двух тел формулы (§ 3 гл. IX; § 4 гл. XIII):

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2k^2 (m_0 + m_1)(r^{-1} - a^{-1}).$$

Для случаев двух и трех тел формулы (6.2) и (6.5) были даны в 1772 г. Лагранжем. В 1842 г. Якоби обобщил эти формулы на случай произвольного числа тел и показал, что из них могут быть получены некоторые общие заключения относительно характера движения. Результаты Якоби, в несколько уточненном виде, заключаются в следующем.

Движение системы материальных точек будем называть **устойчивым** (**по Якоби**), если расстояния r_{ij} между телами имеют конечную верхнюю границу.

Двукратное интегрирование равенства (6.5) дает

$$R^2 = R_0^2 + Qt + 2M \int_0^t \int_0^t (U + 2h_0)\, dt^2, \tag{6.7}$$

где через R_0^2 и Q обозначены постоянные интегрирования.

Пусть $\varepsilon > 0$. Если бы существовало такое τ, что для всех $t > \tau$ имело бы место неравенство

$$U + 2h_0 \geqslant \varepsilon,$$

то, как следует из (6.7), величина R^2 стремилась бы к бесконечности при $t \to \infty$ и система не могла бы быть устойчивой. Таким образом, мы можем утверждать, что для каждой устойчивой системы и любых τ и $\varepsilon > 0$ существует такое $t > \tau$, при котором

$$U + 2h_0 < \varepsilon.$$

Так как $U > 0$, то отсюда следует, что при $h_0 > 0$, т. е. для положительных значений барицентрической постоянной энергии система неустойчива. При $h_0 \leqslant 0$ могут иметь место как устойчивые, так и неустойчивые движения. В этом можно убедиться при помощи частных случаев движений в задачах двух и трех тел.

С другой стороны, соотношение (6.7) показывает, что для всех $t > \tau$ не может иметь место неравенство

$$U + 2h_0 \leqslant -\varepsilon.$$

В противном случае правая часть (6.7) стала бы отрицательной при достаточно больших значениях t.

Итак, если система устойчива, то для любых значений τ и $\varepsilon > 0$ существует такое $t > \tau$, при котором

$$|U + 2h_0| < \varepsilon.$$

Так как потенциальная энергия системы равна $-U$, то полученный результат можно выразить так: если движение системы устойчиво, то потенциальная энергия неограниченное число раз принимает значения сколь угодно близкие к удвоенной барицентрической постоянной энергии.