§ 7. Теорема вириала

В механике системы материальных точек **вириалом** называется выражение

$$-\sum m_i(\xi_i F^i_\xi + \eta_i F^i_\eta + \zeta_i F^i_\zeta),$$

где через $\{m_i F^i_\xi,\ m_i F^i_\eta,\ m_i F^i_\zeta\}$ обозначена сила, действующая на точку $\{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$, масса которой равна m_i.

В рассматриваемом нами случае движения под действием тяготения это выражение в силу (6.1) равно силовой функции U. Поэтому формула Лагранжа — Якоби может здесь служить для вычисления вириала.

Положив для краткости

$$W(t) = \sum m_i(\xi_i\dot{\xi}_i + \eta_i\dot{\eta}_i + \zeta_i\dot{\zeta}_i),$$

проинтегрировав равенство (6.2) от нуля до t и разделив полученное выражение на t, будем иметь

$$\frac{1}{t}[W(t) - W(0)] = \tilde{U} + 2h, \tag{7.1}$$

где через

$$\tilde{U} = \frac{1}{t}\int_0^t U\,dt$$

обозначена средняя величина силовой функции (или вириала) на рассматриваемом интервале времени.

Если движение устойчиво и, следовательно, координаты и скорости заключены в конечных интервалах, то при $t \to \infty$ левая часть равенства (7.1) стремится к нулю.

Поэтому для достаточно больших интервалов времени соотношение (7.1) можно заменить таким:

$$\tilde{U} = -2h.$$

Отсюда, учитывая интеграл энергии (1.11), имеем

$$\tilde{U} = 2\tilde{T}, \tag{7.2}$$

где через $\tilde{T}$ обозначено среднее значение кинетической энергии.

Равенство (7.2) называется **теоремой вириала**.

Г. Ф. Хильми [1950] показал, что эта теорема может быть заменена следующим, более определенным утверждением:

Если движение системы устойчиво и если потенциальная энергия $-U$ этой системы такова, что

$$|U - A| < \eta \tag{7.3}$$

для всех $t>\tau$, где A, η и τ — некоторые постоянные числа, то для всех $t>\tau$ имеют место неравенства

$$|U+2h_0|<2\eta; \ |2T-U|<2\eta. \tag{7.4}$$

Второе из этих неравенств является очевидным следствием первого и интеграла энергии, написанного в форме

$$2T-U=U+2h_0.$$

Чтобы доказать первое из неравенств (7.4) заметим, что тождества

$$U+2h_0=U-A+A+2h_0,$$
$$A+2h_0=A-U+U+2h_0$$

позволяют написать, учитывая (7.3), такие неравенства:

$$|U+2h_0|<|A+2h_0|+\eta, \tag{7.5}$$
$$|A+2h_0|<|U+2h_0|+\eta. \tag{7.6}$$

В предыдущем параграфе мы видели, что для любых значений τ и $\varepsilon>0$ существует такое $t'>\tau$, что

$$|U(t')+2h_0|<\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (7.6) следует, что

$$|A+2h_0|<\varepsilon+\eta.$$

Так как левая часть есть фиксированное число, а ε — произвольное положительное число, то необходимо должно быть

$$|A+2h_0|<\eta.$$

Это неравенство, совместно с (7.5), доказывает справедливость первого из неравенств (7.4), а тем самым и всей теоремы.

§ 8. Формулы Сундмана

Покажем прежде всего, что интеграл энергии позволяет выразить силовую функцию U через величины v_{ij}, определяемые соотношениями

$$v_{ij}^2=(\dot\xi_i-\dot\xi_j)^2+(\dot\eta_i-\dot\eta_j)^2+(\dot\zeta_i-\dot\zeta_j)^2.$$

В самом деле, тождество (6.3), использованное нами при выводе формулы Лагранжа — Якоби, позволяет написать

$$M\sum m_i\dot\xi_i^2-\left(\sum m_i\dot\xi_i\right)^2=Sm_im_j(\dot\xi_i-\dot\xi_j)^2.$$

Сложив такие равенства для всех трех координат и приняв во внимание интегралы (1.7), получим

$$2MT-a_\xi^2-a_\eta^2-a_\zeta^2=Sm_im_jv_{ij}^2.$$