для всех $t>\tau$, где A, η и τ — некоторые постоянные числа, то для всех $t>\tau$ имеют место неравенства

$$|U+2h_0|<2\eta; \quad |2T-U|<2\eta. \tag{7.4}$$

Второе из этих неравенств является очевидным следствием первого и интеграла энергии, написанного в форме

$$2T-U=U+2h_0.$$

Чтобы доказать первое из неравенств (7.4) заметим, что тождества

$$U+2h_0=U-A+A+2h_0,$$
$$A+2h_0=A-U+U+2h_0$$

позволяют написать, учитывая (7.3), такие неравенства:

$$|U+2h_0|<|A+2h_0|+\eta, \tag{7.5}$$
$$|A+2h_0|<|U+2h_0|+\eta. \tag{7.6}$$

В предыдущем параграфе мы видели, что для любых значений τ и $\varepsilon>0$ существует такое $t'>\tau$, что

$$|U(t')+2h_0|<\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (7.6) следует, что

$$|A+2h_0|<\varepsilon+\eta.$$

Так как левая часть есть фиксированное число, а ε — произвольное положительное число, то необходимо должно быть

$$|A+2h_0|<\eta.$$

Это неравенство, совместно с (7.5), доказывает справедливость первого из неравенств (7.4), а тем самым и всей теоремы.

§ 8. Формулы Сундмана

Покажем прежде всего, что интеграл энергии позволяет выразить силовую функцию U через величины v_{ij}, определяемые соотношениями

$$v_{ij}^2=(\dot\xi_i-\dot\xi_j)^2+(\dot\eta_i-\dot\eta_j)^2+(\dot\zeta_i-\dot\zeta_j)^2.$$

В самом деле, тождество (6.3), использованное нами при выводе формулы Лагранжа — Якоби, позволяет написать

$$M\sum m_i\dot\xi_i^2-\left(\sum m_i\dot\xi_i\right)^2=Sm_im_j(\dot\xi_i-\dot\xi_j)^2.$$

Сложив такие равенства для всех трех координат и приняв во внимание интегралы (1.7), получим

$$2MT-a_\xi^2-a_\eta^2-a_\zeta^2=Sm_im_jv_{ij}^2.$$

Исключив отсюда T при помощи интеграла (1.11), будем иметь

$$Sm_i m_j v_{ij}^2 = 2MU + 2Mh_0, \tag{8.1}$$

где через h_0 обозначена барицентрическая постоянная энергии, определяемая равенством (6.6).

Очевидно, v_{ij} есть абсолютная величина скорости точки m_j относительно m_i. Разложим эту скорость на две компоненты: одну, направленную по вектору, идущему от m_i к m_j и равную, очевидно, $\dot{r}_{ij}$; другую — перпендикулярную к этому вектору. Обозначив вторую компоненту через n_{ij}, будем иметь

$$v_{ij}^2 = \dot{r}_{ij}^2 + n_{ij}^2.$$

Таким образом, соотношение (8.1) дает

$$Sm_i m_j \dot{r}_{ij}^2 = 2MU + 2Mh_0 - Sm_i m_j n_{ij}^2. \tag{8.2}$$

С другой стороны, известное тождество Лагранжа для произведения двух сумм квадратов позволяет написать

$$S\left[(\sqrt{m_i m_j}\, r_{ij})^2\right] S\left[(\sqrt{m_i m_j}\, \dot{r}_{ij})^2\right] = (Sm_i m_j r_{ij} \dot{r}_{ij})^2 + N,$$

где

$$N = SS\left[m_i m_j m_k m_h (r_{ij} \dot{r}_{kh} - r_{kh} \dot{r}_{ij})^2\right],$$

причем последняя сумма распространяется на все возможные различные комбинации пар индексов (i, j) и (k, h).

При помощи равенства (6.4) и полученного из него дифференцированием соотношения

$$R\dot{R} = Sm_i m_j r_{ij} \dot{r}_{ij},$$

это тождество можно написать так:

$$S\left[(\sqrt{m_i m_j}\, \dot{r}_{ij})^2\right] = \dot{R}^2 + NR^{-2}.$$

Сопоставление этого равенства с (8.2) дает

$$\dot{R}^2 = 2MU - P + 2Mh_0, \tag{8.3}$$

где для краткости положено

$$P = Sm_i m_j n_{ij}^2 + NR^{-2}.$$

Обратимся теперь к формуле (6.5). Написав ее в развернутом виде

$$R\ddot{R} + \dot{R}^2 = MU + 2Mh_0 \tag{8.4}$$

и исключив постоянную h_0 при помощи соотношения (8.3), окончательно получим

$$R\ddot{R} + MU = P. \tag{8.5}$$

С другой стороны, исключение U из (8.3) и (8.4) дает

$$\dot{R}^2 + 2R\ddot{R} = P + 2Mh_0. \tag{8.6}$$

Формулы (8.5) и (8.6) были даны Сундманом, широко их использовавшим при изучении столкновений в задаче трех тел [Сундман, 1912]. При этом в отношении сложной по своему составу функции P оказалось достаточным учитывать лишь то, что эта функция не может быть отрицательной.

§ 9. Об общем решении задачи нескольких тел

Задача нескольких тел была поставлена во всей своей общности сразу после открытия закона тяготения, но решение этой задачи с самого начала натолкнулось на непреодолимые трудности. Тем не менее попытки хотя бы только приблизиться к ее решению никогда не прекращались, причем каждая эпоха посвоему понимала, что следует разуметь под решением.

В течение первых полутораста лет усилия были направлены в сторону формального интегрирования уравнений движения. Результаты, эквивалентные десяти интегралам, рассмотренным в § 1, были открыты еще в первой половине XVIII в. В 1777 г. Лагранж придал этим интегралам применяемую теперь форму. Ему было также, по существу, известно, что источником первых девяти из этих интегралов является инвариантность уравнений движения относительно группы преобразования координат, выражаемого формулой

$$\rho'_i = \Omega\rho_i + \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}, \tag{9.1}$$

где через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначены постоянные векторы, а через Ω — постоянная ортогональная матрица с равным единице определителем. Выражение (9.1) содержит девять произвольных постоянных.

Дальнейшее понижение порядка системы дифференциальных уравнений на две единицы ценою введения двух последующих квадратур (§ 1) принадлежит также, по сути дела, Лагранжу. Этим исчерпывается все, что могло быть достигнуто на пути формального интегрирования в отношении общего случая задачи нескольких тел.

Но уже в середине XVIII в. стали понимать бесплодность этого пути для решения астрономических проблем и необходимость создания специальных методов, позволяющих разрешать с нужною точностью те частные случаи задачи нескольких тел, с которыми мы встречаемся в солнечной системе. Так, еще в своих первых работах по теории движения Луны Эйлер подчеркивал, что если бы и были найдены новые первые интегралы, то