С другой стороны, исключение U из (8.3) и (8.4) дает

$$\dot{R}^2+2R\ddot{R}=P+2Mh_0. \tag{8.6}$$

Формулы (8.5) и (8.6) были даны Сундманом, широко их использовавшим при изучении столкновений в задаче трех тел [Сундман, 1912]. При этом в отношении сложной по своему составу функции P оказалось достаточным учитывать лишь то, что эта функция не может быть отрицательной.

§ 9. Об общем решении задачи нескольких тел

Задача нескольких тел была поставлена во всей своей общности сразу после открытия закона тяготения, но решение этой задачи с самого начала натолкнулось на непреодолимые трудности. Тем не менее попытки хотя бы только приблизиться к ее решению никогда не прекращались, причем каждая эпоха посвоему понимала, что следует разуметь под решением.

В течение первых полутораста лет усилия были направлены в сторону формального интегрирования уравнений движения. Результаты, эквивалентные десяти интегралам, рассмотренным в § 1, были открыты еще в первой половине XVIII в. В 1777 г. Лагранж придал этим интегралам применяемую теперь форму. Ему было также, по существу, известно, что источником первых девяти из этих интегралов является инвариантность уравнений движения относительно группы преобразования координат, выражаемого формулой

$$\boldsymbol{\rho}_i'=\Omega\boldsymbol{\rho}_i+\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}, \tag{9.1}$$

где через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначены постоянные векторы, а через Ω — постоянная ортогональная матрица с равным единице определителем. Выражение (9.1) содержит девять произвольных постоянных.

Дальнейшее понижение порядка системы дифференциальных уравнений на две единицы ценою введения двух последующих квадратур (§ 1) принадлежит также, по сути дела, Лагранжу. Этим исчерпывается все, что могло быть достигнуто на пути формального интегрирования в отношении общего случая задачи нескольких тел.

Но уже в середине XVIII в. стали понимать бесплодность этого пути для решения астрономических проблем и необходимость создания специальных методов, позволяющих разрешать с нужною точностью те частные случаи задачи нескольких тел, с которыми мы встречаемся в солнечной системе. Так, еще в своих первых работах по теории движения Луны Эйлер подчеркивал, что если бы и были найдены новые первые интегралы, то они, несомненно, были бы слишком сложны и не принесли бы пользы.

В мемуаре, опубликованном в 1763 г., Эйлер дал метод численного интегрирования уравнений движения и указал, что этот метод является единственным, позволяющим решать любой случай задачи нескольких тел. С другой стороны, в ряде мемуаров он начал изучение некоторых весьма частных случаев, а именно: случая прямолинейного движения в задаче трех тел; случая бесконечно малой массы одного из трех тел (ограниченная задача трех тел); движения в поле тяготения двух неподвижных центров. Эйлер полагал, что изучение надлежаще выбранных частных случаев лучше всего поможет осветить трудности, стоящие на пути общего решения задачи.

Создание во второй половине XIX в. аналитической теории дифференциальных уравнений позволило иначе поставить вопрос об общем решении задачи нескольких тел. Под таким решением теперь стали понимать изучение свойств аналитических функций, выражающих зависимость координат от времени.

Если начальные значения координат при $t=t_0$ таковы, что все расстояния r_{ij} между телами отличны от нуля, то правые части уравнений (1.2) являются голоморфными функциями в окрестности начальных значений. Поэтому согласно основной теореме Коши будет существовать решение, соответствующее этим начальным значениям, причем в этом решении координаты будут аналитическими функциями t в окрестности точки t_0.

Предположим теперь, что при выбранных нами начальных условиях соударения невозможны для всех вещественных значений t. В таком случае будет существовать полоса шириною $2h$ (где $h>0$), симметричная относительно вещественной оси комплексной t-плоскости, внутри которой все взаимные расстояния r_{ij} между телами отличны от нуля.

Решение, найденное в окрестности точки t_0, может быть вычислено в любой точке этой полосы при помощи аналитического продолжения. Такой путь требует, однако, весьма громоздких вычислений. Пуанкаре указал (1884) другой способ достижения той же цели, основанный на преобразовании

$$t=\frac{2h}{\pi}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}, \tag{9.2}$$

отображающем рассматриваемую полосу плоскости t на круг $|\tau|<1$ плоскости нового переменного τ.

Координаты ξ_i, η_i, ζ_i всех тел будут в рассматриваемом нами случае голоморфными функциями τ в области $|\tau|<1$, а потому могут быть разложены в степенные ряды, сходящиеся в этой области. Так как вещественной оси плоскости t в силу (9.2) соответствует отрезок $-1<\tau<+1$ плоскости τ, то полученные степенные ряды представляют координаты для всех вещественных значений времени.

Таким образом, если сделанное нами предположение об отсутствии в рассматриваемом движении соударений в вещественные моменты времени справедливо, то задача аналитического представления этого движения может считаться решенной.

Но у нас нет возможности судить по начальным условиям движения, выполняется или нет сделанное предположение. Попытки получить соответствующие критерии в простейшем случае, когда рассматривается задача трех тел, были сделаны Бискончини в 1905 г. и Блоком в 1909 г. Однако полученные ими результаты далеко не решают вопроса.

§ 10. Об общем решении задачи трех тел

Проблема аналитического представления движения для случая задачи трех тел была решена Сундманом [1912] при помощи метода регуляризации вещественных соударений. Укажем вкратце полученные им результаты, не останавливаясь на доказательствах.

Прежде всего доказывается теорема:

Если при $t \to t_1$ наименьшее из взаимных расстояний r_{01}, r_{12}, r_{20} между телами стремится к нулю, то либо все три расстояния стремятся к нулю, либо одно из них стремится к нулю, а два другие стремятся к одной и той же конечной величине.

В первом случае мы имеем в момент t_1 тройной удар, во втором случае — парное соударение. Признак отсутствия тройного удара дается теоремой:

Если барицентрический вращательный импульс не равен нулю (иначе говоря, если рассматриваемое движение имеет плоскость Лапласа), то можно указать такое $\alpha > 0$, что по крайней мере два из расстояний r_{ij} будут всегда больше α.

Таким образом, тройной удар возможен только в случае несуществования плоскости Лапласа.

Изучение парных соударений, начатое Леви-Чивита и Бискончини, было завершено Сундманом. Ему удалось доказать следующее основное предложение (выдвинутое Бискончини в качестве гипотезы):

Если в момент t_1 происходит соударение двух тел, то при $t \to t_1$ вектор, соединяющий эти тела, стремится к определенному предельному положению, а его угловая скорость к нулю.