степенные ряды представляют координаты для всех вещественных значений времени.

Таким образом, если сделанное нами предположение об отсутствии в рассматриваемом движении соударений в вещественные моменты времени справедливо, то задача аналитического представления этого движения может считаться решенной.

Но у нас нет возможности судить по начальным условиям движения, выполняется или нет сделанное предположение. Попытки получить соответствующие критерии в простейшем случае, когда рассматривается задача трех тел, были сделаны Бискончини в 1905 г. и Блоком в 1909 г. Однако полученные ими результаты далеко не решают вопроса.

## § 10. Об общем решении задачи трех тел

Проблема аналитического представления движения для случая задачи трех тел была решена Сундманом [1912] при помощи метода регуляризации вещественных соударений. Укажем вкратце полученные им результаты, не останавливаясь на доказательствах.

Прежде всего доказывается теорема:

Если при $t \to t_1$ наименьшее из взаимных расстояний $r_{01}$, $r_{12}$, $r_{20}$ между телами стремится к нулю, то либо все три расстояния стремятся к нулю, либо одно из них стремится к нулю, а два другие стремятся к одной и той же конечной величине.

В первом случае мы имеем в момент $t_1$ тройной удар, во втором случае — парное соударение. Признак отсутствия тройного удара дается теоремой:

Если барицентрический вращательный импульс не равен нулю (иначе говоря, если рассматриваемое движение имеет плоскость Лапласа), то можно указать такое $\alpha > 0$, что по крайней мере два из расстояний $r_{ij}$ будут всегда больше $\alpha$.

Таким образом, тройной удар возможен только в случае несуществования плоскости Лапласа.

Изучение парных соударений, начатое Леви-Чивита и Бискончини, было завершено Сундманом. Ему удалось доказать следующее основное предложение (выдвинутое Бискончини в качестве гипотезы):

Если в момент $t_1$ происходит соударение двух тел, то при $t \to t_1$ вектор, соединяющий эти тела, стремится к определенному предельному положению, а его угловая скорость к нулю.

Можно показать, далее, что расстояние $r$ между соударяющимися телами убывает в достаточно малом интервале $[t_1-\varepsilon, t_1]$, где $\varepsilon>0$, монотонно, а величина скорости при $t\to t_1$ стремится к беконечности как $r^{-1/2}$.

Перейдем теперь к регуляризации парных соударений, позволяющей дать аналитическое продолжение решения дифференциальных уравнений после такого соударения.

Относительное положение трех тел будем определять (§ 5) координатами $x$, $y$, $z$ точки $m_1$ в системе, имеющей начало в $m_0$, и координатами $\xi$, $\eta$, $\zeta$ точки $m_2$ по отношению к осям, имеющим начало в центре инерции точек $m_0$ и $m_1$.

Пусть в интервале $[t_0, t_1)$ соударений нет, а в момент $t_1$ происходит соударение тел $m_0$ и $m_1$. Введя вместо $t$ новую независимую переменную

$$u=\int_{t_0}^{t} r_{01}^{-1}\,dt; \quad r_{01}=(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \tag{10.1}$$

и положив

$$u_1=\int_{t_0}^{t_1} r_{01}^{-1}\,dt,$$

можно показать, что правые части дифференциальных уравнений, дающих $x$, $y$, $z$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ в функции $u$, остаются голоморфными и в точке $u=u_1$.

Таким образом, каждая из этих координат может быть разложена в силу основной теоремы Коши в сходящийся ряд по целым положительным степеням разности $u-u_1$. Вычисление показывает, что начальные члены этих рядов таковы:

$$\left.\begin{aligned} x&=a(u-u_1)^2+\ldots; & \xi&=\xi_1+\alpha(u-u_1)^3+\ldots,\\ y&=b(u-u_1)^2+\ldots; & \eta&=\eta_1+\beta(u-u_1)^3+\ldots,\\ z&=c(u-u_1)^2+\ldots; & \zeta&=\zeta_1+\gamma(u-u_1)^3+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

Подстановка этих выражений в (10.1) дает (если единицы выбраны так, что $k^2=1$):

$$\left.\begin{aligned} r_{01}&=\frac{1}{2}(m_0+m_1)(u-u_1)^2+\ldots,\\ t&=t_1+\frac{1}{6}(m_0+m_1)(u-u_1)^3+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Ряды (10.2) и (10.3) остаются сходящимися и при $u>u_1$, т. е. при $t>t_1$. Они дают, следовательно, аналитическое продолжение движения (понимаемого как решение дифференциальных уравнений) после удара. В этом именно смысле говорят, что подстановка (10.1) регуляризирует рассматриваемое соударение.

Сопоставление (10.2) и (10.3) показывает, что вблизи момента соударения координаты разлагаются в ряды по целым положительным степеням $(t-t_1)^{1/3}$.

Сундман показал, далее, что промежутки времени между двумя последовательными парными соударениями имеют существенно положительную нижнюю границу. Отсюда следует, что в каждом конечном интервале времени может быть лишь конечное число парных соударений.

Поэтому, исключив из рассмотрения тот случай, когда плоскость Лапласа не существует (и, следовательно, возможны тройные соударения), мы можем дать аналитическое продолжение движения от начального момента $t_0$ до любого другого момента.

Переменную $u$, позволяющую регуляризировать парное соударение (т. е. осуществить аналитическое продолжение движения после момента удара), приходится выбирать различно в зависимости от того, какое из взаимных расстояний $r_{ij}$ стремится к нулю. Таким образом, для различных интервалов времени движение приходится представлять различными формулами.

Сундман показал, что переменная $\omega$, определяемая равенствами

$$dt = \Gamma\, d\omega; \quad \omega(0) = 0, \tag{10.4}$$

где

$$\Gamma = \left(1 - e^{-\frac{r_{01}}{l}}\right)\left(1 - e^{-\frac{r_{12}}{l}}\right)\left(1 - e^{-\frac{r_{20}}{l}}\right),$$

причем через $l$ обозначена некоторая постоянная положительная величина, позволяет регуляризировать движение во всем интервале $-\infty < t < +\infty$.

Отметим прежде всего, что каждому конечному, вещественному значению $t$ соответствует также конечное и вещественное значение $\omega$. Из (10.1) и (10.4) имеем

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r}{\Gamma},$$

где правая часть остается конечной при $r \equiv r_{01} \to 0$. Отсюда следует, что $\omega$ стремится к конечному пределу, когда $u$ стремится к значению $u_1$, соответствующему моменту удара $t_1$. Таким образом, переменная $\omega$ остается конечной для всех конечных значений $t$, какие бы парные соударения ни происходили.

С другой стороны, так как $0 \leqslant \Gamma < 1$, то $|t| < |\omega|$, как это видно из равенств (10.4). Поэтому $t$ остается также конечным для всех конечных значений $\omega$.

Все это показывает, что $\omega$ и $t$ одновременно стремятся как к $+\infty$, так и к $-\infty$.

Установив, таким образом, общий характер переменной $\omega$, можно доказать, что координаты трех тел, их взаимные расстояния и время являются регулярными функциями $\omega$ в полосе, ограниченной двумя прямыми, параллельными вещественной оси и симметрично расположенными относительно этой оси. Обозначив ширину этой полосы через $2h$ и применив подстановку Пуанкаре (9.2) в форме

$$\omega = \frac{2h}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}, \tag{10.5}$$

найдем, что все только что указанные величины разлагаются в ряды по целым положительным степеням $\tau$, сходящиеся при $|\tau| < 1$.

Таким путем доказывается знаменитая теорема Сундмана:

Пусть в задаче трех тел начальные условия движения таковы, что существует плоскость Лапласа. Тогда можно найти такие постоянные $l$ и $h$, что координаты тел, их взаимные расстояния и время $t$ будут голоморфными функциями $\tau$ в области $|\tau| < 1$, где $\tau$ определяется соотношениями (10.4) и (10.5).

Эта теорема решает, в указанном выше смысле, задачу трех тел. Но такое решение имеет лишь математический интерес и не может быть использовано при изучении астрономических вопросов. Единые формулы, охватывающие все столь разнообразные случаи движения, какие могут иметь место в задаче трех тел, совсем не подходят для изучения каждого конкретного случая в отдельности. Аналогичное явление имеет место даже в несравненно более простом случае задачи двух тел: здесь тоже можно было бы дать формулы, охватывающие все возможные случаи движения; но предпочитают, как мы видели выше, пользоваться для каждого вида движения своими специфическими формулами.

Малая пригодность единых всеобъемлющих формул для изучения конкретных случаев движения выражается, между прочим, в крайне медленной сходимости рядов Сундмана. Примером может служить следующий расчет [Белорицкий, 1933], относящийся к случаю лагранжева движения (§ 1 гл. XV), когда положения и скорости тел в начальный момент $t=0$ таковы, что рассматриваемые тела во все время движения образуют равносторонний треугольник. Предположим, далее, что массы тел равны и что единица времени выбрана так, что постоянная тяготения равна единице. При этих предположениях, для вычисления координат для момента $t=1$ (т. е. через 58,132... суток после начального момента) с ошибкой, не превышающей 10%, в рядах Сундмана надо взять число членов, превосходящее $10^{80000}$.

Если массы не равны, то придется, при тех же условиях, взять еще большее число членов.

Небесномеханическая «задача трех тел» является, очевидно, лишь приближением к проблеме движения трех тел конечного размера, стоящей перед нами в действительности. Вообще говоря, изучение упрощенной, приближенной проблемы может быть интересно для естествознания лишь тогда, когда оно остается в границах, в которых упрощенная проблема остается еще достаточно близкой к реальной. А только что указанная трактовка соударений этому условию явно не удовлетворяет. Но, несмотря на это, теория регуляризации соударений оказалась полезной и для решения чисто астрономических задач, так как подстановки вида (10.1) помогли ускорить сходимость рядов, представляющих координаты небесных тел.

Другой путь для получения общего решения задачи трех тел (в случае, когда существует плоскость Лапласа) был указан Г. А. Мерманом [1958]. В данном им решении координаты трех тел и время получаются в форме рядов Миттаг-Леффлера, члены которых являются полиномами от переменной $\omega$, определяемой соотношениями (10.4). Эти ряды сходятся для всех вещественных значений $\omega$, а потому представляют решение задачи трех тел для $t \in (-\infty, +\infty)$.

Решение Г. А. Мермана является эффективным в том смысле, что указан способ для последовательного получения членов рассматриваемых рядов и дана оценка погрешности, делаемой при замене бесконечных рядов конечным числом их членов.

Различные модификации рядов Миттаг-Леффлера, сходящихся для любого вещественного момента времени и представляющих общее решение задачи трех тел, изучались численными методами В. А. Брумбергом [1963].