ГЛАВА XV

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Случаи, в которых задача трех тел приводится к задаче двух тел

Известно несколько частных случаев задачи трех тел, разрешаемых до конца элементарными средствами. Один такой случай совершенно очевиден: если массы двух тел бесконечно малы, то изучение движения приводится к решению двух раздельных задач двух тел. В этом параграфе будет показано, что возможны и другие случаи, когда относительные движения происходят по кеплеровым орбитам, а потому задача трех тел легко разрешается до конца. Несмотря на свой весьма специальный характер, эти случаи представляют большой интерес; опираясь на такой частный случай, мы имеем возможность довольно глубоко изучить значительную область смежных движений, среди которых встречаются и имеющие непосредственное астрономическое применение.

Изучая в задаче трех тел коллинеарные движения (т. е. такие, в которых три тела всегда остаются на одной прямой), Эйлер показал (в 1767 и 1770 гг.), что при любых массах возможно коллинеарное движение, в котором каждое тело описывает по отношению к каждому другому телу кеплерову орбиту. Так как три массы можно расположить на прямой тремя различными способами, то в общем случае(когда среди масс нет равных) существует три движения такого рода. Эти движения будем называть *эйлеровыми случаями задачи трех тел*.

Можно показать, что в эйлеровых случаях движение происходит так, что конфигурация трех тел остается все время подобной самой себе. Общий вопрос о нахождении всех движений, в которых отношения расстояний между телами остаются неизменными, был решен Лагранжем в 1772 г. Оказалось, что, кроме только что указанных эйлеровых случаев, имеется еще два таких движения. В этих новых случаях, получивших название *лагранжевых*, три тела образуют всегда равносторонний треугольник, причем движение их относительно общего центра инерции, а также по отношению друг к другу происходит также по кеплеровым орбитам.

Рассмотрим задачу о нахождении всех тех случаев, когда относительные движения происходят по кеплеровым орбитам. Решение этой задачи должно дать нам, на основании только что сказанного, все движения, найденные Эйлером и Лагранжем. Мы увидим, что других решений эта задача, поставленная и решенная К. Штумпффом [1951], не имеет.

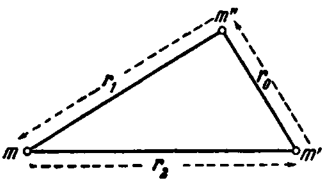

Рис. 18.

Взаимное положение трех тел, имеющих массы m, m', m'', будем определять векторами $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, как это показано на рис. 18. Очевидно,

$$\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=0. \tag{1.1}$$

Уравнения относительного движения (§ 4 гл. XIV) дают

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2}=-k^2(m+m')\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}+k^2m''\left(\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}+\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}\right) \tag{1.2}$$

и два аналогичных уравнения, получающихся из (1.2) циклической перестановкой индексов.

Так как каждое из трех относительных движений, представляемых векторами $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, по условию должно быть кеплеровым, то уравнение (1.2) и ему аналогичные должны быть тождественны с такими:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}=-k^2h_i\frac{\boldsymbol{r}_i}{r_i^3} \qquad (i=0,\ 1,\ 2), \tag{1.3}$$

где через h_0, h_1, h_2 обозначены не зависящие от времени величины.

Иначе говоря, должны иметь место тождества

$$(m+m'-h_2)\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}-m''\left(\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}+\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}\right)=0,\ \ldots$$

Учитывая (1.1), их можно написать так:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_0\left(\frac{m''}{r_0^3}+\frac{m+m'-h_2}{r_2^3}\right)+\boldsymbol{r}_1\left(\frac{m''}{r_1^3}+\frac{m+m'-h_2}{r_2^3}\right)&=0,\\
\boldsymbol{r}_1\left(\frac{m}{r_1^3}+\frac{m'+m''-h_0}{r_0^3}\right)+\boldsymbol{r}_2\left(\frac{m}{r_2^3}+\frac{m'+m''-h_0}{r_0^3}\right)&=0,\\
\boldsymbol{r}_2\left(\frac{m'}{r_2^3}+\frac{m''+m-h_1}{r_1^3}\right)+\boldsymbol{r}_0\left(\frac{m'}{r_0^3}+\frac{m''+m-h_1}{r_1^3}\right)&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Такие равенства могут иметь место только в двух случаях: 1) если векторы r_i коллинеарны, и 2) если коэффициенты, стоящие в них при этих векторах, равны нулю.

Рассмотрим первый случай, т. е. предположим, что массы находятся на одной прямой. Из трех возможных расположений возьмем то, когда тело с массой m' лежит между двумя другими, так что $r_1=r_2+r_0$. Положив

$$r_0=zr_2; \qquad r_1=(1+z)r_2, \tag{1.5}$$

из соотношений (1.4) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} h_0&=m'+m''-m\frac{z^3(2+z)}{(1+z)^2},\\ h_1&=m''+m+m'(1+z)^2(1+z^{-2}),\\ h_2&=m+m'-m''\frac{1+2z}{z^2(1+z)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Так как h_i — постоянные величины, то эти равенства показывают, что z — тоже величина постоянная. Иначе говоря, все движения, происходящие по кеплеровым орбитам, таковы, что конфигурация трех масс остается подобной себе самой.

Чтобы найти z, подставим выражения (1.5) в уравнения (1.3). Это дает

$$h_0=z^3h_2; \qquad (1+z)^3h_0=z^3h_1.$$

Исключение величин h_i при помощи (1.6) из любого из этих соотношений приводит к одному и тому же уравнению для z:

$$(m+m')z^5+(3m+2m')z^4+(3m+m')z^3-$$
$$-(m'+3m'')z^2-(2m'+3m'')z-m'-m''=0. \tag{1.7}$$

Последовательность коэффициентов уравнения (1.7) имеет только одну перемену знака; уравнение имеет поэтому согласно теореме Декарта один и только один положительный корень.

Итак, расположив тела на одной прямой на расстояних, удовлетворяющих условиям (1.5), где z — положительный корень уравнения (1.7), и придав им начальные скорости, подчиненные условиям

$$\frac{dr_0}{dt}=-\frac{z}{1+z}\frac{dr_1}{dt}=z\frac{dr_2}{dt},$$

мы получим кеплеровы движения, определяемые уравнениями (1.3), в которых h_i имеют значения (1.6).

Расположив те же самые массы в порядке m', m, m'', или в порядке m, m'', m', получим для них еще два эйлеровых движения. Соответствующие значения z, определяющие отношения взаимных расстояний, найдем из уравнений, получаемых путем надлежащей перестановки индексов в (1.7).

Обратимся теперь к другому возможному случаю: предположим, что векторы r_i, удовлетворяющие соотношениям (1.4), не коллинеарны. Существование этих соотношений возможно тогда лишь при условии равенства нулю шести величин, стоящих в скобках. Это дает

$$\frac{m+m'-h_2}{r_2^3} = -\frac{m''}{r_0^3} = -\frac{m''}{r_1^3}; \ \ldots$$

Отсюда

$$r_0 = r_1 = r_2; \quad h_0 = h_1 = h_2 = m + m' + m''.$$

Иначе говоря, движущиеся массы должны всегда находиться в вершинах равностороннего треугольника.

Масса m'' может быть помещена по отношению к массам m и m' двумя различными способами так, чтобы получился равносторонний треугольник. Поэтому можно сказать, что мы имеем два таких случая, когда три тела описывают в своем относительном движении кеплеровы орбиты, образуя все время равносторонний треугольник. Эти движения называются, как уже было сказано, лагражевыми случаями задачи трех тел.

Заметим, что три эйлеровых случая и два лагранжевых очень часто называются пятью лагранжевыми случаями задачи трех тел. Такое наименование возникло потому, что указанные выше работы Эйлера (не упомянутые Лагранжем) были полностью забыты до самого недавнего времени. Встречающееся иногда в литературе наименование этих частных случаев задачи трех тел лапласовыми еще менее оправдано. Оно возникло потому, что Лаплас [1799—1825], излагая этот вопрос, не упомянул ни Эйлера, ни Лагранжа.

На доказательстве того, что эти пять случаев являются единственными, в которых расстояния между телами сохраняют постоянные отношения, мы не будем останавливаться *).

§ 2. Планетоидная задача трех тел

Из частных случаев задачи трех тел, имеющих непосредственные астрономические приложения, одним из наиболее важных является тот, когда одна из масс настолько мала, что не производит заметного влияния на движение двух других. Этот случай мы назовем планетоидной задачей трех тел **).

Таким образом, в планетоидной задаче рассматривается движение тела, имеющего «бесконечно малую» массу, в поле тяготения двух тел с конечными массами, совершающих относитель-

*) Относительно теории таких решений задачи трех тел и связанных с ней вопросов см.: М. Ф. Субботин [1937], Винтнер [1941], Хамель [1949].

**) Его называли иногда эллиптической ограниченной задачей трех тел, но такое название нельзя считать удачным.