Обратимся теперь к другому возможному случаю: предположим, что векторы r_i, удовлетворяющие соотношениям (1.4), не коллинеарны. Существование этих соотношений возможно тогда лишь при условии равенства нулю шести величин, стоящих в скобках. Это дает

$$\frac{m+m'-h_2}{r_2^3} = -\frac{m''}{r_0^3} = -\frac{m''}{r_1^3}; \ \ldots$$

Отсюда

$$r_0 = r_1 = r_2; \quad h_0 = h_1 = h_2 = m + m' + m''.$$

Иначе говоря, движущиеся массы должны всегда находиться в вершинах равностороннего треугольника.

Масса m'' может быть помещена по отношению к массам m и m' двумя различными способами так, чтобы получился равносторонний треугольник. Поэтому можно сказать, что мы имеем два таких случая, когда три тела описывают в своем относительном движении кеплеровы орбиты, образуя все время равносторонний треугольник. Эти движения называются, как уже было сказано, лагражевыми случаями задачи трех тел.

Заметим, что три эйлеровых случая и два лагранжевых очень часто называются пятью лагранжевыми случаями задачи трех тел. Такое наименование возникло потому, что указанные выше работы Эйлера (не упомянутые Лагранжем) были полностью забыты до самого недавнего времени. Встречающееся иногда в литературе наименование этих частных случаев задачи трех тел лапласовыми еще менее оправдано. Оно возникло потому, что Лаплас [1799—1825], излагая этот вопрос, не упомянул ни Эйлера, ни Лагранжа.

На доказательстве того, что эти пять случаев являются единственными, в которых расстояния между телами сохраняют постоянные отношения, мы не будем останавливаться *).

§ 2. Планетоидная задача трех тел

Из частных случаев задачи трех тел, имеющих непосредственные астрономические приложения, одним из наиболее важных является тот, когда одна из масс настолько мала, что не производит заметного влияния на движение двух других. Этот случай мы назовем планетоидной задачей трех тел **).

Таким образом, в планетоидной задаче рассматривается движение тела, имеющего «бесконечно малую» массу, в поле тяготения двух тел с конечными массами, совершающих относитель-

---

*) Относительно теории таких решений задачи трех тел и связанных с ней вопросов см.: М. Ф. Субботин [1937], Винтиер [1941], Хамель [1949].

**) Его называли иногда эллиптической ограниченной задачей трех тел, но такое название нельзя считать удачным.

ное движение по кеплеровым орбитам. Только частный случай этой задачи, в котором относительное движение происходит по круговым орбитам и который носит название ограниченной задачи трех тел, изучен достаточно глубоко. Ограниченная задача будет нами рассмотрена в следующих параграфах, а сейчас посмотрим, что дают эйлеровы и лагранжевы случаи для общей планетоидной задачи.

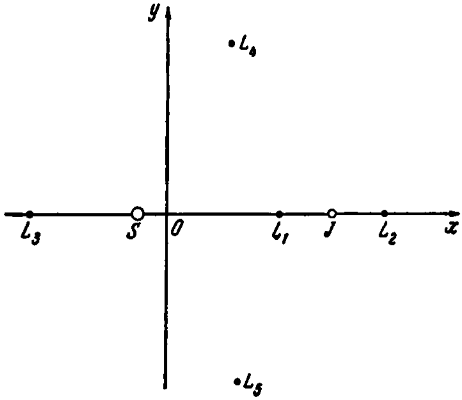

Рис. 19.

Имея в виду астрономические применения, массу m_1 тела S будем считать очень большой (Солнце), массу m_2 тела J будем считать очень малой (планета). Исчезающе малую массу тела P, не оказывающего заметного влияния на движение двух других тел, обозначим через m_0. Расстояние SJ, т. е. радиус-вектор планеты, обозначим через r, а расстояния SP и JP — через r_1 и r_2.

Найдем те положения, находясь в которых P может совершать эйлеровы движения. Полагая в уравнении (1.7) $m=m_1$, $m'=m_0$, $m''=m_2$ и пренебрегая m_0, получим

$$m_1z^5+3m_1z^4+3m_1z^3-3m_2z^2-3m_2z-m_2=0.$$

Так как $m_1>1000m_2$, то нужный нам положительный корень этого уравнения очень мал. Поэтому в первом приближении уравнение можно заменить таким: $3m_1z^3-m_2=0$, что дает

$$z=\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}. \tag{2.1}$$

Положим

$$\mu=\frac{m_2}{m_1+m_2}; \quad \nu=\left(\frac{1}{3}\mu\right)^{1/3}. \tag{2.2}$$

Так как соотношения (1.5) в принятых сейчас обозначениях дают $r=(1+z)r_1$, то после уточнения значения z окончательно будем иметь

$$r_1=r\left(1-\nu+\frac{1}{3}\nu^2+\frac{1}{9}\nu^3+\ldots\right). \tag{2.3}$$

Точку, которая находится на радиусе-векторе планеты на таком расстоянии от Солнца, будем называть первым центром либрации и обозначать через L_1 (рис. 19). Результаты предыдущего параграфа показывают, что бесконечно малая масса, будучи помещена в эту точку с надлежащей начальной скоростью, будет двигаться вокруг центра инерции O тел S и J по кеплеровой орбите. С другой стороны, при некоторых небольших отклонениях от этих начальных условий бесконечно малая масса может совершать вокруг L_1 колебательные (иначе говоря, либрационные) движения. Это будет показано дальше (§ 8).

Если в уравнении (1.7) положить $m=m_1$, $m'=m_2$, $m''=m_0=0$, т. е. считать, что планета J расположеиа между S и P, то будем иметь

$$(m_1+m_2)z^5+(3m_1+2m_2)z^4+(3m_1+m_2)z^3-m_2z^2-2m_2z-m_2=0.$$

Таким образом, в первом приближении для z можно взять то же самое значение (2.1). Уточнив это значение и учтя, что в рассматриваемом сейчас случае соотношения (1.5) дают $r_1=(1+z)r$, для расстояния от Солнца второго центра либрации L_2 получим

$$r_1=r\left(1+\nu+\frac{1}{3}\nu^2-\frac{1}{9}\nu^3+\ldots\right). \tag{2.4}$$

В третьем случае коллинеарного движения, когда Солнце S находится между планетоидом P и планетой J, имеем $r=zr_1$, причем z определяется уравнением

$$f(z)=0,$$

где

$$f(z)=m_1z^5+2m_1z^4+m_1z^3-(m_1+3m_2)z^2-$$
$$-(2m_1+3m_2)z-(m_1+m_2).$$

Положительный корень этого уравнения мало отличается от единицы. Уточняя это приближенное значение по правилу Ньютона, получим

$$z=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=1+\frac{7m_2}{12m_1-9m_2}=1+\frac{7}{12}\mu+\ldots$$

Дальнейшее уточнение величины z дает следующее значение радиуса-вектора третьего центра либрации L_3:

$$r_1=r\left(1-\frac{7}{12}\mu-\frac{1\,127}{20\,736}\mu^3-\frac{1\,127}{20\,736}\mu^4+\ldots\right). \tag{2.5}$$

Положения коллинеарных центров либрации для всех больших планет (кроме Плутона, масса которого недостаточно хорошо известна) указаны в прилагаемой табличке, дающей расстояния этих точек от Солнца, выраженные в частях радиуса-вектора соответствующей планеты.

Положение коллинеарных центров либрации

	L_1	L_2	L_3
Меркурий	0,9966	1,0034	1—0,000 000 07
Венера	0.9907	1,0093	1—0,000 001 43
Земля	0,9899	1,0101	1—0,000 001 78
Марс	0,9952	1,0048	1—0,000 000 19
Юпитер	0,9332	1,0698	1—0,000 557
Сатурн	0,9550	1,0464	1—0,000 167
Уран	0,9758	1,0246	1—0,000 026
Нептун	0,9743	1,0261	1—0,000 030

Интересно отметить, что у всех планет спутники находятся значительно ближе, нежели центры либрации L_1 и L_2. Так, например, расстояние от Земли до Луны в четыре раза меньше, чем расстояния до этих центров.

Лагранжевы движения, рассмотренные в предыдущем параграфе, дают два соответствующих частных решения планетоидной задачи. В этих частных решениях исчезающе малая масса должна находиться в одной из точек L_4 или L_5, образующих равносторонние треугольники с конечными массами S и J. Точки L_4 и L_5, которые также могут быть центрами либрационного движения (§ 9), будем называть **тригональными центрами либрации***).

В указанной на рис. 19 координатной системе положение этих точек определяется координатами

$$x=\left(\frac{1}{2}-\mu\right)r, \quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}r, \tag{2.6}$$

где верхний знак соответствует точке L_4, а нижний — точке L_5.

Вопрос об устойчивости лагранжевых движений при произвольных значениях масс m_0, m_1, m_2 был изучен А. М. Ляпуновым в 1889 г. [Ляпунов, 1954; стр. 327—401]. Важнейший из полученных им результатов заключается в следующем.

Для устойчивости движения прежде всего необходимо, чтобы подобные конические сечения, по которым движутся рассматриваемые массы m_0, m_1, m_2, все время образующие равносторонний треугольник, были эллипсами. Обращаясь к случаю эллиптического движения, обозначим через e величину эксцентриситета трех подобных эллипсов, описываемых массами в их движении относительно общего центра инерции.

Пусть, далее,

$$\lambda = 3\frac{m_0m_1+m_1m_2+m_2m_0}{(m_0+m_1+m_2)^2},$$

а через α, β и γ обозначим некоторые положительные функции e, стремящиеся к нулю вместе с e.

*) От греческого слова «тригонос» — треугольник. Про светило, отстоящее от другого на 60°, в древности и в средние века говорили, что оно находится по отношению к этому последнему в тригональном положении.

В таком случае движение устойчиво, если при $e < e'$, где e' достаточно малая величина, выполняется одно из двух следующих условий:

$$\lambda < \frac{1}{12} - \alpha \quad \text{или} \quad \frac{1}{12} + \beta < \lambda < \frac{1}{9} + \gamma; \tag{2.7}$$

оно неустойчиво, если ни одно из этих условий не выполняется.

В частном случае, для ограниченной задачи, когда $m_0 = 0$, $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$, и следовательно,

$$\lambda = 3\mu(1-\mu), \quad \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

условия (2.7) приводятся к одному:

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}.$$

Отсюда следует, что в ограниченной задаче трех тел при $\mu < 0{,}03852\ldots$ центры либрации L_4 и L_5 являются положениями устойчивого относительного равновесия.

§ 3. Ограниченная задача трех тел. Интеграл Якоби

Обратимся теперь к более подробному изучению ограниченной задачи трех тел. Она заключается, как уже было сказано, в следующем:

требуется найти движение тела P с бесконечно малой массой, притягиваемого двумя телами S и J, имеющими конечные массы и описывающими круговые орбиты вокруг общего центра инерции.

С такого рода задачей мы встречаемся, например, когда изучаем движение планетоида или кометы под влиянием притяжения Солнца и Юпитера, причем орбиту Юпитера считаем в первом приближении круговой.

Точно так же движение Луны можно в первом приближении рассматривать как частный случай ограниченной задачи. Но при этом приходится пренебрегать не только эксцентриситетом земной орбиты и притяжением всех других планет, но и массой Луны, т. е. тем притяжением, которое она производит на Землю и Солнце.

Обозначим через m_1 и m_2 массы тел S и J. Не ограничивая общности, мы можем всегда считать, что $m_1 \geqslant m_2$.

За начало координат примем общий центр инерции O; плоскость, в которой происходит движение тел S и J, возьмем за плоскость xy; наконец, прямую SOJ возьмем за ось Ox. Координаты точек S и J в такой системе координат мы можем, очевидно, обозначить через $(-d_1, 0, 0)$ и $(d_2, 0, 0)$, где $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Обозначим, далее, через n постоянную угловую скорость, с которой прямая SOJ вращается вокруг точки O. По третьему закону Кеплера

$$n^2(d_1 + d_2)^3 = k^2(m_1 + m_2), \tag{3.1}$$