В таком случае двнжение устойчнво, если прн $e < e'$, где e' достаточно малая величина, выполняется одно из двух следующнх условий:

$$\lambda < \frac{1}{12} - \alpha \quad \text{или} \quad \frac{1}{12} + \beta < \lambda < \frac{1}{9} + \gamma; \tag{2.7}$$

оно неустойчиво, если нн одно нз этих условий не выполняется.

В частном случае, для ограннченной задачн, когда $m_0 = 0$, $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$, и следовательно,

$$\lambda = 3\mu(1-\mu), \quad \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

условия (2.7) приводятся к одному:

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}.$$

Отсюда следует, что в ограннченной задаче трех тел при $\mu < 0{,}03852\ldots$ центры лнбрацни L_4 и L_5 являются положениями устойчивого относительного равновесия.

§ 3. Ограниченная задача трех тел. Интеграл Якоби

Обратимся теперь к более подробному изучению ограниченной задачи трех тел. Она заключается, как уже было сказано, в следующем:

требуется найти движение тела P с бесконечно малой массой, притягиваемого двумя телами S и J, имеющими конечные массы и описывающими круговые орбиты вокруг общего центра инерции.

С такого рода задачей мы встречаемся, например, когда изучаем движение планетоида или кометы под влиянием притяжения Солнца и Юпитера, причем орбиту Юпитера считаем в первом приближении круговой.

Точно так же движение Луны можно в первом приближении рассматривать как частный случай ограниченной задачи. Но при этом приходится пренебрегать не только эксцентриситетом земной орбиты и притяжением всех других планет, но и массой Луны, т. е. тем притяжением, которое она производит на Землю и Солнце.

Обозначим через m_1 и m_2 массы тел S и J. Не ограничивая общности, мы можем всегда считать, что $m_1 \geqslant m_2$.

За начало координат примем общий центр инерции O; плоскость, в которой происходит движение тел S и J, возьмем за плоскость xy; наконец, прямую SOJ возьмем за ось Ox. Координаты точек S и J в такой системе координат мы можем, очевидно, обозначить через $(-d_1, 0, 0)$ и $(d_2, 0, 0)$, где $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Обозначим, далее, через n постоянную угловую скорость, с которой прямая SOJ вращается вокруг точки O. По третьему закону Кеплера

$$n^2(d_1 + d_2)^3 = k^2(m_1 + m_2), \tag{3.1}$$

так как d_1+d_2 есть большая полуось орбиты, описываемой одним из тел S и J относительно другого под влиянием взаимного притяжения.

Положительное направление оси Oy выберем так, чтобы n было положительным числом.

Пусть x, y, z будут координаты точки P. Так как координатная система вращается с угловой скоростью n вокруг оси z, то компоненты абсолютной скорости этой точки равны

$$\dot{x}-ny, \quad \dot{y}+nx, \quad \dot{z}.$$

Поэтому, обозначая через m_0 массу точки P, для кинетической энергии этой точки будем иметь следующее выражение:

$$T=\frac{1}{2}m_0\left[(\dot{x}-ny)^2+(\dot{y}+nx)^2+\dot{z}^2\right].$$

Уравнения Лагранжа в применении к этому случаю дают

$$\ddot{x}-2n\dot{y}-n^2x=U_x; \quad \ddot{y}+2n\dot{x}-n^2y=U_y; \quad \ddot{z}=U_z,$$

где через U обозначена функция сил, действующих на точку P, разделенная на m_0.

В рассматриваемом нами случае, когда точка P движется под влиянием притяжения точек S и J, имеем

$$U=k^2\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right).$$

Поэтому, полагая

$$\Omega=\frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+k^2\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right), \tag{3.2}$$

окончательно уравнения движения в ограниченной задаче трех тел напишем следующим образом:

$$\ddot{x}-2n\dot{y}=\Omega_x; \quad \ddot{y}+2n\dot{x}=\Omega_y; \quad \ddot{z}=\Omega_z. \tag{3.3}$$

Умножая эти уравнения на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, складывая их и интегрируя, получим соотношение

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2\Omega-C, \tag{3.4}$$

где C — произвольная постоянная. Это соотношение известно как *интеграл Якоби*. Постоянную C будем называть *постоянной Якоби*.

Интеграл (3.4) был открыт Якоби в 1836 г. Применение его к выяснению некоторых общих свойств относительного движения, излагаемое в следующем параграфе, было указано значительно позднее [Хилл, 1878].