§ 4. Поверхности нулевой скорости

Если через v обозначить скорость точки P относительно нашей подвижной координатной системы, то интеграл Якоби (3.4) можно написать так:

$$v^2 = 2\Omega - C.$$

Это соотношение дает, следовательно, возможность найти величину относительной скорости v в каждой точке нашего вращающегося пространства для всех движений, характеризуемых данной величиной C.

Обратно, если C и v заданы, то это равенство определяет геометрическое место тех точек вращающегося пространства, в которых может находиться тело P.

Рассмотрим всю совокупность движений тела P, совместных с некоторой фиксированной величиной постоянной C. Очевидно, эти движения возможны только в тех местах пространства, в которых $2\Omega - C \geqslant 0$, так как относительная скорость v не может быть мнимой. Поэтому поверхность

$$2\Omega - C = 0 \tag{4.1}$$

является границей, отделяющей те области пространства, в которых вещественные движения, соответствующие выбранному значению C, возможны, от областей, где такие движения невозможны.

Такая поверхность может существовать, очевидно, лишь при положительных значениях постоянной C.

Поверхность (4.1) называется *поверхностью нулевой скорости*, так как во всех ее точках $v = 0$.

Нашей ближайшей задачей является изучение формы поверхности нулевой скорости при различных значениях C.

Прежде всего, условимся выбирать единицы длины и времени так, чтобы было

$$SJ = d_1 + d_2 = 1; \quad k = 1,$$

и следовательно, на основании (3.1),

$$n^2 = m_1 + m_2.$$

В таком случае, учитывая выражение (3.2), мы можем уравнение (4.1) написать следующим образом:

$$(m_1 + m_2)(x^2 + y^2) + \frac{2m_1}{r_1} + \frac{2m_2}{r_2} = C, \tag{4.2}$$

где

$$r_1 = [(x + d_1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}; \quad r_2 = [(x - d_2)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}.$$

Поверхность, представляемая этим уравнением, очевидно, симметрична как относительно плоскости $z = 0$, так и относительно плоскости $y = 0$.

Предположим сначала, что C очень большое число. В этом случае поверхность (4.2) состоит из трех отдельных поверхностей. В самом деле, левая часть уравнения (4.2) может быть очень большой только в точках, в которых хотя бы один из трех членов этой части принимает очень большие значения.

В точках, в которых x^2+y^2 очень велико, второй и третий члены уравнения (4.2) очень малы, так что это уравнение можно написать так:

$$(m_1+m_2)(x^2+y^2)=C-\varepsilon, \tag{4.3}$$

где ε очень малая по сравнению с C положительная величина, принимающая наибольшие значения в плоскости xy и стремящаяся к нулю вместе с $|z|$.

Таким образом, поверхность (4.3), которую можно для краткости назвать *квазицилиндром*, лежит внутри цилиндра

$$(m_1+m_2)(x^2+y^2)=C$$

и асимптотически к нему приближается.

Если r_1 близко к нулю, то первый и третий члены левой части уравнения (4.2) очень малы. Это уравнение имеет, следовательно, вид

$$r_1=\frac{2m_1}{C-\varepsilon_1}, \tag{4.4}$$

где $\varepsilon_1>0$ и очень мало́ по сравнению с C.

Уравнение (4.4) представляет замкнутую поверхность, заключающую точку S. При $C\to\infty$ эта поверхность обращается в пределе в сферу бесконечно малого радиуса с центром в S. Назовем ее *квазисферой*.

Легко видеть, что квазисфера (4.4) целиком заключает внутри себя сферу $r_1=2m_1/C$, причем больше всего она удаляется от этой сферы в плоскости xy, а особенно — в направлении к точке J. Она имеет таким образом грушевидную форму.

Третью часть поверхности нулевой скорости образует аналогичная квазисфера

$$r_2=\frac{2m_2}{C-\varepsilon_2}, \tag{4.5}$$

окружающая точку J и вытянутая по направлению к точке S.

На рис. 20, 21 и 22 кривые, отмеченные буквой C', представляют сечения координатными плоскостями поверхности нулевой скорости в только что рассмотренном случае, когда постоянная Якоби C очень велика.

Посмотрим теперь, как будет меняться форма этой поверхности при уменьшении C. Так как квазисферы (4.4) и (4.5) будут при этом увеличиваться, а квазицилиндр (4.3) будет делаться более узким, то при некоторых значениях $C=C_1$, $C=C_2$ и $C=C_3$ каждая пара этих поверхностей будет иметь общую точку. При дальнейшем уменьшении C произойдет слияние соответствующих поверхностей в одну (двуполостную).

На рис. 20 и 21 показана форма поверхности (4.1) для значения $C=C_1$, при котором появляется общая точка у поверхностей (4.4) и (4.5), и для значения $C=C_3$, при котором поверхности (4.3) и (4.4) имеют общую точку. Показана также форма поверхности (4.1) при таком значении C'' постоянной Якоби, при котором три рассматриваемые поверхности обратились уже в одну двуполостную. При дальнейшем уменьшении C полости этой поверхности уходят на бесконечность.

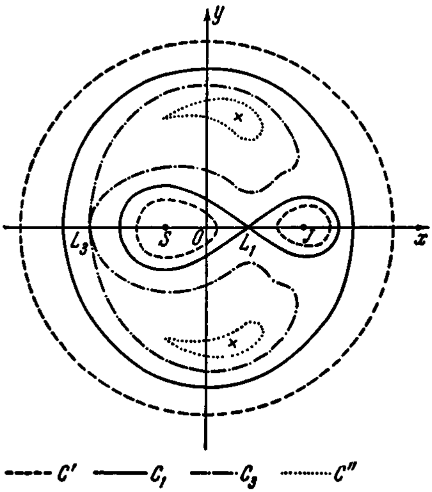

Рис. 20.

Те точки пространства $Oxyz$, в которых начинается слияние отдельных частей поверхности нулевой скорости, являются, очевидно, особыми точками этой поверхности. Этим обстоятельством мы и воспользуемся в следующем параграфе для нахождения координат таких точек.

Поверхность (4.1) отделяет те области пространства $Oxyz$, в которых движение возможно, от тех областей, в которых движение невозможно. Вне квазицилиндра (4.3) и внутри квазисфер (4.4) и (4.5) мы имеем $v^2>0$, а потому движение возможно. При уменьшении C область возможных движений будет расширяться и при достаточно малых значениях C она будет заключать всю плоскость xy. Так, при $C=C''$ движения будут невозможны на плоскости xy лишь внутри пунктирных кривых (рис. 20), которые при дальнейшем уменьшении C будут сжиматься, обратятся в точки (указанные на рис. 20 крестиками), а затем совсем исчезнут. После этого поверхность (4.1) разделится на две не имеющие общих точек части, одна из которых будет находиться выше плоскости xy, а другая — ниже.

Точки плоскости xy, в которые стягиваются кривые C'' (рис. 20) при дальнейшем уменьшении постоянной Якоби, также являются особыми точками поверхности (4.1).

Изучение поверхностей нулевой скорости, притом не только качественное, но и количественное, было выполнено Хиллом в его фундаментальной работе по теории движения Луны [Хилл, 1878].

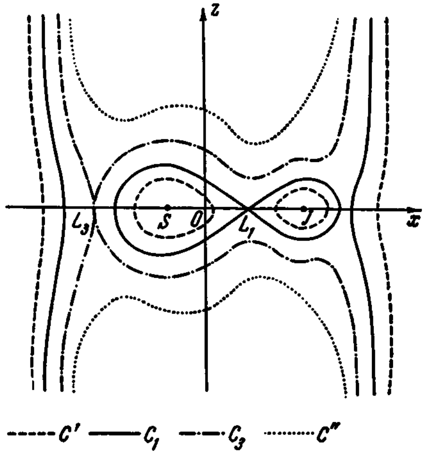

Рис. 21.

В этой работе Хилл указал весьма интересное применение полученных результатов к вопросу об устойчивости движения Луны. Если ее движение уподобить движению бесконечно малой массы в ограниченной задаче трех тел, то мы будем иметь здесь первый из разобранных случаев, когда поверхность нулевой скорости состоит из квазицилиндра и двух квазисфер. Расстояния от Земли до ближайшей и до наиболее удаленной из точек окружающей Землю квазисферы равны соответственно 104,4 и 109,7 экваториального радиуса Земли. Между тем расстояние Луны от Земли в настоящее время колеблется (благодаря эллиптичности ее орбиты) от 56,96 до 63,58 земных радиусов.

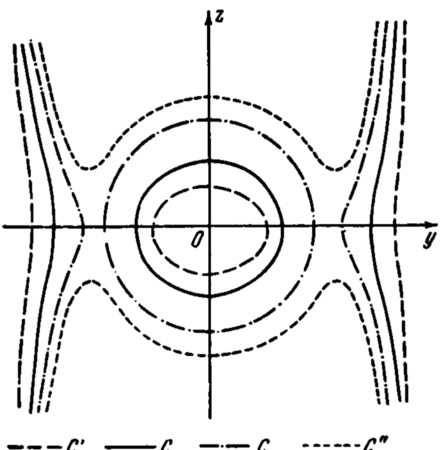

Рис. 22.

Таким образом, Луна находится глубоко внутри квазисферы, окружающей Землю, и не может выйти из этой квазисферы. Неучтенные здесь массы Луны, эксцентриситет земной орбиты и планетные возмущения не могут изменить основной характер этого результата — существование верхней границы геоцентрического радиуса-вектора Луны. Поэтому, если оставаться в области динамики точечных масс (пренебрегая, например, приливными деформациями) и предполагать неизменность общего характера солнечной системы, устойчивость движения Луны можно считать доказанной.

Аналогичное исследование устойчивости движения спутников Юпитера было выполнено В. Ф. Проскуриным [1950]. Оказалось, что движения спутников VIII и IX определенно неустойчивы, для спутников XI и XII устойчивость весьма сомнительна, тогда как движение остальных спутников вполне «устойчиво по Хиллу».

§ 5. Особые точки поверхностей нулевой скорости

Особые точки поверхности

$$F(x, y, z)=0$$

определяются, как известно, уравнениями

$$F_x=0, \quad F_y=0, \quad F_z=0,$$

которые должны быть решены совместно с уравнением поверхности.

Для поверхностей нулевой скорости, уравнение которых имеет вид

$$2\Omega - C = 0, \tag{5.1}$$

где

$$2\Omega = (m_1+m_2)(x^2+y^2)+\frac{2m_1}{r_1}+\frac{2m_2}{r_2}, \tag{5.2}$$

$$r_1=[(x+d_1)^2+y^2+z^2]^{1/2}; \quad r_2=[(x-d_2)^2+y^2+z^2]^{1/2},$$

особые точки даются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \Omega_x &\equiv (m_1+m_2)\,x-\frac{m_1(x+d_1)}{r_1^3}-\frac{m_2(x-d_2)}{r_2^3}=0,\\ \Omega_y &\equiv (m_1+m_2)\,y-\frac{m_1y}{r_1^3}-\frac{m_2y}{r_2^3}=0,\\ \Omega_z &\equiv -\frac{m_1z}{r_1^3}-\frac{m_2z}{r_2^3}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

После того как из уравнений (5.3) найдены координаты особых точек, равенство (5.1) даст возможность вычислить соответствующие значения C.

Легко видеть, какой механический смысл имеют особые точки поверхности нулевой скорости. Обращаясь к уравнениям (3.3) движения тела P и сопоставляя их с равенствами (5.3), мы видим, что в каждой такой точке не только

$$\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0,$$

но и

$$\ddot{x}=\ddot{y}=\ddot{z}=0.$$

Поэтому тело P, очутившись в особой точке и имея соответствующее значение постоянной Якоби, будет иметь и скорость