Аналогичное исследование устойчивости движения спутников Юпитера было выполнено В. Ф. Проскуриным [1950]. Оказалось, что движения спутников VIII и IX определенно неустойчивы, для спутников XI и XII устойчивость весьма сомнительна, тогда как движение остальных спутников вполне «устойчиво по Хиллу».

§ 5. Особые точки поверхностей нулевой скорости

Особые точки поверхности

$$F(x, y, z)=0$$

определяются, как известно, уравнениями

$$F_x=0, \quad F_y=0, \quad F_z=0,$$

которые должны быть решены совместно с уравнением поверхности.

Для поверхностей нулевой скорости, уравнение которых имеет вид

$$2\Omega - C = 0, \tag{5.1}$$

где

$$2\Omega = (m_1+m_2)(x^2+y^2)+\frac{2m_1}{r_1}+\frac{2m_2}{r_2}, \tag{5.2}$$

$$r_1=[(x+d_1)^2+y^2+z^2]^{1/2}; \quad r_2=[(x-d_2)^2+y^2+z^2]^{1/2},$$

особые точки даются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_x \equiv (m_1+m_2)\,x-\frac{m_1(x+d_1)}{r_1^3}-\frac{m_2(x-d_2)}{r_2^3}=0,\\ &\Omega_y \equiv (m_1+m_2)\,y-\frac{m_1 y}{r_1^3}-\frac{m_2 y}{r_2^3}=0,\\ &\Omega_z \equiv -\frac{m_1 z}{r_1^3}-\frac{m_2 z}{r_2^3}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

После того как из уравнений (5.3) найдены координаты особых точек, равенство (5.1) даст возможность вычислить соответствующие значения C.

Легко видеть, какой механический смысл имеют особые точки поверхности нулевой скорости. Обращаясь к уравнениям (3.3) движения тела P и сопоставляя их с равенствами (5.3), мы видим, что в каждой такой точке не только

$$\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0,$$

но и

$$\ddot{x}=\ddot{y}=\ddot{z}=0.$$

Поэтому тело P, очутившись в особой точке и имея соответствующее значение постоянной Якоби, будет иметь и скорость и ускорение равными нулю, а потому навсегда останется в этой точке.

Итак, особые точки поверхности (5.1) являются положениями относительного равновесия тела P; в этих точках тело может находиться в равновесии относительно нашей вращающейся системы координат.

При нахождении тела P в особой точке расстояния между тремя телами S, J и P сохраняют, очевидно, постоянные отношения. Поэтому рассматриваемые особые точки являются не чем иным, как центрами либрации, изученными в § 1.

Обратимся теперь к вычислению координат центров либрации и вычислению соответствующих значений постоянной Якоби.

Последнее из уравнений (5.3) дает $z=0$, откуда следует, что все центры либрации лежат в плоскости xy.

Если предположить, что $y\neq0$, то второе из уравнений (5.3) даст

$$m_1+m_2-m_1r_1^{-3}-m_2r_2^{-3}=0. \tag{5.4}$$

Умножив это равенство на x и вычитая результат из первого уравнения (5.3), получим

$$-m_1d_1r_1^{-3}+m_2d_2r_2^{-3}=0.$$

Так как

$$-m_1d_1+m_2d_2=0,$$

то отсюда следует, что $r_1=r_2$. Поэтому, как показывает соотношение (5.4), $r_1=r_2=1$; иначе говоря, треугольник SJP должен быть равносторонним.

Итак, рассматриваемые особые точки совпадают с тригональными центрами либрации L_4 и L_5 (§ 2). Координаты этих центров даются равенствами

$$x=\frac{1}{2}-\mu, \quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z=0.$$

Чтобы узнать, имеет ли функция 2Ω в этих точках экстремум, воспользуемся равенством

$$m_1r_1^2+m_2r_2^2=(m_1+m_2)(x^2+y^2+z^2)+m_1m_2/(m_1+m_2), \tag{5.5}$$

в справедливости которого легко убедиться, если заметить, что

$$d_1=m_2/(m_1+m_2), \quad d_2=m_1/(m_1+m_2).$$

Это равенство позволяет написать выражение (5.2) следующим образом:

$$2\Omega=m_1r_1^2+m_2r_2^2+2m_1r_1^{-1}+2m_2r_2^{-1}-(m_1+m_2)z^2-$$
$$-m_1m_2(m_1+m_2)^{-1}, \tag{5.6}$$

или

$$2\Omega = C_4 - (m_1 + m_2) z^2 + m_1 (r_1 - 1)^2 (1 + 2r_1^{-1}) + \\ + m_2 (r_2 - 1)^2 (1 + 2r_2^{-1}). \quad (5.7)$$

где через

$$C_4 = 3(m_1 + m_2) - m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$$

обозначена величина постоянной C в точках L_4 и L_5.

Отсюда ясно, что в общем случае функция Ω не имеет в точках L_4 и L_5 экстремума, но если рассматривать плоскую ограниченную проблему трех тел ($z=0$), то она имеет в этих точках минимум.

Обратимся теперь к решению системы (5.3) в предположении, что $y=0$. В этом случае искомые особые точки лежат на оси Ox и их абсциссы даются уравнением

$$(m_1 + m_2) x - m_1 \frac{x + d_1}{|x + d_1|^3} - m_2 \frac{x - d_2}{|x - d_2|^3} = 0. \quad (5.8)$$

Изменение знака левой части показывает, что это уравнение имеет три вещественных корня — по одному в каждом из интервалов $(-\infty, -d_1)$, $(-d_1, d_2)$, $(d_2, +\infty)$. Соответствующие этим корням особые точки поверхности нулевой скорости совпадают, как легко видеть, с центрами либрации L_3, L_1, L_2, рассмотренными в § 2. В самом деле, вычислим расстояния r_1, r_2 и значения постоянной C для каждой из этих точек. Так как r_1 и r_2 зависят только от отношения масс m_2/m_1, то положим опять

$$\mu = m_2/(m_1+m_2), \qquad 1 - \mu = m_1/(m_1+m_2)$$

(что дает $d_1 = \mu$, $d_2 = 1 - \mu$) и будем рассматривать r_1 и r_2 как функции μ. В силу сделанного выше предположения, что $m_2 < m_1$, достаточно изучить эти функции в интервале $0 \leqslant \mu \leqslant 0{,}5$.

Для центра либрации L_1 мы имеем $-d_1 < x < d_2$ и потому

$$r_1 = x + d_1, \quad r_2 = -x + d_2, \quad r_1 = 1 - r_2.$$

Введя в уравнение (5.8) в качестве неизвестной r_2, после всех упрощений получим

$$r_2^5 - (3 - \mu) r_2^4 + (3 - 2\mu) r_2^3 - \mu r_2^2 + 2\mu r_2 - \mu = 0. \quad (5.9)$$

Интересующий нас корень этого уравнения, находящийся в интервале $(0,1)$, легко разложить в ряд по степеням μ. С этой целью уравнению (5.9) придадим такой вид:

$$r_2^3 = \mu \frac{1 - 3r_2 + r_2^2 + 2r_2^3 - r_2^4}{3 - 3r_2 + r_2^2}.$$

Разлагая правую часть в ряд и извлекая из обеих частей кубический корень, получим

$$r_2=\nu\left(1-\frac{1}{3}r_2-\frac{2}{9}r_2^2+\ldots\right),$$

где

$$\nu=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\mu}.$$

Применение метода итерации к уравнению, представленному в такой форме, очень быстро дает искомое разложение:

$$r_2=\nu-\frac{1}{3}\nu^2-\frac{1}{9}\nu^3-\ldots$$

Обратимся теперь к центру либрации L_2, для которого $d_2<x<+\infty$, и, следовательно,

$$r_1=x+d_1,\quad r_2=x-d_2,\quad r_1=1+r_2.$$

Здесь уравнение (5.8) может быть приведено к виду

$$r_2^5+(3-\mu)r_2^4+(3-2\mu)r_2^3-\mu r_2^2-2\mu r_2-\mu=0. \tag{5.10}$$

Для единственного положительного корня этого уравнения только что примененный прием дает следующее разложение:

$$r_2=\nu+\frac{1}{3}\nu^2-\frac{1}{9}\nu^3+\ldots$$

Рассмотрим, наконец, центр либрации L_3, для которого $-\infty<x<-d_1$, и потому

$$r_1=-x-d_1,\quad r_2=-x+d_2,\quad r_1=r_2-1.$$

Если за неизвестную принять r_1, то уравнение (5.8) напишется так:

$$r_1^5+(\mu+2)r_1^4+(2\mu+1)r_1^3+(\mu-1)r_1^2+(2\mu-2)r_1+\mu-1=0. \tag{5.11}$$

При $\mu=0$ это уравнение дает $r_1=1$. Способом неопределенных коэффициентов или методом итерации окончательно получим

$$r_1=1-\frac{7}{12}\mu-\frac{1\,127}{20\,736}\mu^3-\frac{1\,127}{20\,736}\mu^4-\ldots$$

Для вычисления постоянной Якоби можно воспользоваться формулой

$$C=m_1r_1^2+m_2r_2^2+2m_1r_1^{-1}+2m_2r_2^{-1}-m_1m_2(m_1+m_2)^{-1},$$

легко получаемой из (5.1) и (5.6).

Приближенные значения этой постоянной, соответствующие точкам L_1, L_2 и L_3, таковы:

$$C_1 = m_1(3 + 9\nu^2 - \nu^3 + \ldots),$$
$$C_2 = m_1(3 + 9\nu^2 - 5\nu^3 + \ldots),$$
$$C_3 = m_1\left(3 + 4\mu + \frac{191}{48}\mu^2 + \ldots\right).$$

Приводимая здесь таблица дает представление об изменении положения центров либрации и соответствующих им значений постоянной Якоби при изменении μ.

μ	Точка L_1		Точка L_2		Точка L_3	
	r_1	C_1/m_1	r_1	C_2/m_1	r_1	C_3/m_1
0,00	1,0000	3,000	1,0000	3,000	1,0000	3,000
,01	0,8581	3,200	1,1568	3,186	0,9942	3,040
,02	0,8235	3,319	1,2001	3,292	0,9883	3,082
,03	0,7996	3,421	1,2312	3,379	0,9825	3,124
,04	0,7809	3,513	1,2564	3,458	0,9767	3,167
,05	0,7652	3,600	1,2781	3,531	0,9708	3,210
0,10	0,7090	3,997	1,3597	3,852	0,9416	3,444
,20	0,6381	4,756	1,4710	4,440	0,8828	3,997
,30	0,5861	5,600	1,5567	5,081	0,8232	4,702
,40	0,5416	6,635	1,6308	5,865	0,7620	5,632
0,50	0,5000	8,000	1,6984	6,914	0,6984	6,914

На рис. 23 изображены сечения плоскостью $z=0$ нескольких поверхностей нулевой скорости вблизи центров либрации L_1 и L_2 для случая $\mu=0{,}000\,9539$, соответствующего отношению масс Юпитера и Солнца.

Приведенные на этом рисунке кривые соответствуют нижеследующим значениям постоянной Якоби:

Кривая 1 . . . $C=3{,}04260$	Кривая 5 . . . $C=3{,}03007$
» 2 . . . $C=3{,}04132$	» 6 . . . $C=3{,}02007$
» 3 . . . $C=3{,}04007$	» 7 . . . $C=3{,}01007$
» 4 . . . $C=3{,}03632$	

Центрам либрации L_4 и L_5 (не поместившимся на чертеже) соответствует значение $C=3{,}00286$.

Примечание I. Обозначим биполярные координаты центра либрации L_k через $\left(r_1^{(k)}, r_2^{(k)}\right)$.

Легко видеть, что для $0<\mu<0{,}5$ имеют место неравенства

$$\mu < r_2^{(1)} < \mu^{1/3},$$

$$\mu^{2/3} < r_2^{(2)} < \mu^{1/3},$$

$$(1-\mu)^{2/3} < r_1^{(3)} < (1-\mu)^{1/3}.$$

Действительно, чтобы доказать, например, второе из этих неравенств, достаточно заметить, что левая часть уравнения (5.10), которым определяется $r_2^{(2)}$, для $r_2=\mu^{2/3}$ и $r_2=\mu^{1/3}$ обращается соответственно в

$$\mu(\mu-1)\left[\mu^{4/3}+\mu^{2/3}(2-\mu)-2\mu+1\right] \quad \text{и} \quad \mu(1-\mu)(\mu^{1/3}+2),$$

но при $0<\mu<0{,}5$ первая из этих величин отрицательна, а вторая — положительна.

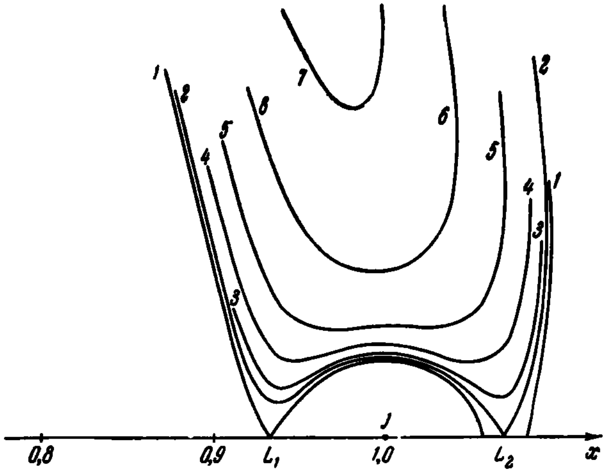

Рис. 23.

Примечание II. Функция Ω не имеет в точках L_1, L_2, L_3 экстремума. В самом деле, выражения вторых производных этой функции (см. § 8) показывают, что в каждой из этих точек

$$\Omega''_{xx} > 0, \qquad \Omega''_{xx}\Omega''_{yy} - \Omega''^2_{xy} < 0,$$

что и доказывает отсутствие экстремума.

§ 6. Критерий Тиссерана

Интеграл Якоби был использован при решении вопроса о тождественности вновь открытой периодической кометы с кометой ранее наблюдавшейся. Такой вопрос далеко не всегда может быть решен путем простого сравнения элементов орбит, так как