Легко видеть, что для $0<\mu<0{,}5$ имеют место неравенства

$$\mu < r_2^{(1)} < \mu^{1/3},$$

$$\mu^{2/3} < r_2^{(2)} < \mu^{1/3},$$

$$(1-\mu)^{2/3} < r_1^{(3)} < (1-\mu)^{1/3}.$$

Действительно, чтобы доказать, например, второе из этих неравенств, достаточно заметить, что левая часть уравнения (5.10), которым определяется $r_2^{(2)}$, для $r_2=\mu^{2/3}$ и $r_2=\mu^{1/3}$ обращается соответственно в

$$\mu(\mu-1)\left[\mu^{4/3}+\mu^{2/3}(2-\mu)-2\mu+1\right] \text{ и } \mu(1-\mu)(\mu^{1/3}+2),$$

но при $0<\mu<0{,}5$ первая из этих величин отрицательна, а вторая — положительна.

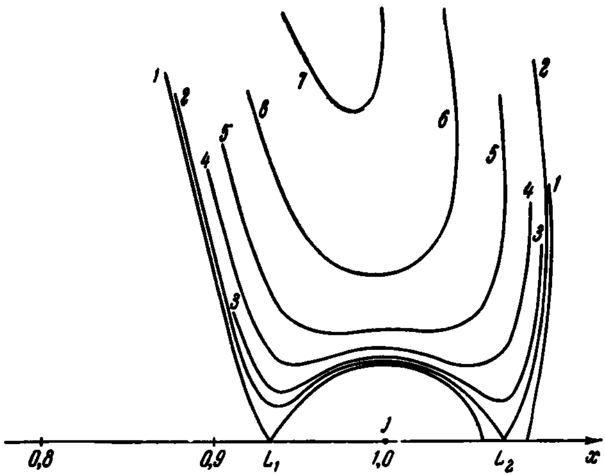

Рис. 23.

Примечание II. Функция Ω не имеет в точках L_1, L_2, L_3 экстремума. В самом деле, выражения вторых производных этой функции (см. § 8) показывают, что в каждой из этих точек

$$\Omega''_{xx} > 0, \quad \Omega''_{xx}\Omega''_{yy} - \Omega''^2_{xy} < 0,$$

что и доказывает отсутствие экстремума.

§ 6. Критерий Тиссерана

Интеграл Якоби был использован при решении вопроса о тождественности вновь открытой периодической кометы с кометой ранее наблюдавшейся. Такой вопрос далеко не всегда может быть решен путем простого сравнения элементов орбит, так как в случае прохождения кометы вблизи одной из больших планет ее орбита может измениться до неузнаваемости.

Конечно, вопрос всегда может быть решен путем вычисления возмущений одной из рассматриваемых комет за промежуток времени, отделяющий ее появление от появления другой кометы. Но такое вычисление требует немало труда, так что производить его имеет смысл лишь при наличии шансов на успешное отождествление.

Большие изменения элементов, придающие орбите заметно другой характер, происходили всегда при прохождении кометы очень близко от Юпитера, когда комета оказывалась внутри его сферы действия (§ 6 гл. XVIII). Именно за короткое время (не превышающее нескольких месяцев) пребывания кометы внутри сферы действия Юпитера и происходят те большие изменения элементов, по сравнению с которыми возмущения, производимые остальными планетами, уже не имеют существенного значения.

С другой стороны, прохождения кометы через сферы действия других планет столь мало вероятны, что не наблюдались еще ни разу.

Все это показывает, что движение комет с интересующей нас точки зрения можно уподобить, если пренебречь эксцентриситетом Юпитера, движению бесконечно малой массы в ограниченной задаче трех тел.

Таким образом, координаты кометы (x, y, z) должны удовлетворять, каковы бы ни были ее возмущения со стороны Юпитера, соотношению (3.4), которое (несколько меняя обозначения) можно написать так:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=n'^2(x^2+y^2)+2k^2\left(\frac{1}{r}+\frac{m'}{\rho}\right)-C. \tag{6.1}$$

Здесь n' есть среднее суточное движение Юпитера, r и ρ — расстояния кометы от Солнца и Юпитера. Масса Солнца принята за единицу, а через m' обозначена масса Юпитера.

Отсюда получается следующее необходимое условие тождественности двух комет: две наблюдавшиеся в разное время кометы могут оказаться тождественными только в том случае, когда вычисленные для них постоянные Якоби достаточно мало отличаются между собой.

При вычислении C по формуле (6.1) надо взять координаты x, y, z и скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ относительно вращающейся системы осей с центром в O для любого момента времени. Чтобы упростить эти вычисления, перейдем к гелиоцентрической системе координат $S\xi\eta\zeta$ с неизменным направлением осей, в которой ось $S\zeta$ параллельна оси Oz.

Если время t считать от того момента, когда ось Ox совпадает с $S\xi$, то формулы перехода напишутся так:

$$\left.\begin{aligned} x+d_1 &= +\xi\cos n't+\eta\sin n't,\\ y &= -\xi\sin n't+\eta\cos n't,\\ z &= +\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

где через d_1 обозначено расстояние SO.

Следовательно,

$$x^2+y^2=\xi^2+\eta^2-2d_1(\xi\cos n't+\eta\sin n't)+d_1^2,$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2+n'^2(\xi^2+\eta^2)-2n'(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}).$$

В новой координатной системе уравнение (6.1) принимает вид

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2-2n'(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})=2k^2\left(\frac{1}{r}+\frac{m'}{\rho}\right)-$$
$$-2n'^2d_1(\xi\cos n't+\eta\sin n't)+n'^2d_1^2-C. \tag{6.3}$$

Если через a, p, e, i, ... обозначить оскулирующие элементы кометы в ее движении относительно Солнца, то

$$\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}=k\sqrt{p}\cos i,$$

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2=k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

Вследствие этого последнее равенство дает

$$\Gamma=a^{-1}+2n'k^{-1}\sqrt{p}\cos i+\delta,$$

где

$$\Gamma=Ck^{-2}, \tag{6.4}$$

$$\delta=n'^2k^{-2}d_1^2+2m'\rho^{-1}-2n'^2k^{-2}(\xi\cos n't+\eta\sin n't).$$

Обозначив через $a'=SJ$ большую полуось орбиты Юпитера, так что

$$n'^2=k^2(1+m')a'^{-3};\quad d_1=\frac{m'a'}{1+m'},$$

окончательно будем иметь

$$\Gamma=a^{-1}+2\sqrt{(1+m')a'^{-3}}\sqrt{p}\cos i+\delta, \tag{6.5}$$

$$\delta=\frac{m'^2}{(1+m')a'}+\frac{2m'}{\rho}-\frac{2m'}{a'^2}(\xi\cos n't+\eta\sin n't). \tag{6.6}$$

Формула (6.5) применяется для вычисления величины Γ, эквивалентной постоянной Якоби, в такой момент t, когда комета наблюдается, т. е. находится недалеко от Солнца. В этом случае ξ и η — величины малые, тогда как ρ мало отличается от a'. Поскольку, далее,

$$m' = 0{,}000954786, \quad a' = 5{,}203, \tag{6.7}$$

величиной δ пренебрегают и ограничиваются вычислением величины

$$\Gamma = a^{-1} + 0{,}16860\sqrt{p}\cos i, \tag{6.8}$$

носящей название **инварианта кометы**.

Таким образом, вместо постоянной Якоби, определяемой равенством (6.1), можно пользоваться инвариантом (6.8).

Достаточная близость инвариантов двух комет является необходимым (но, очевидно, недостаточным) условием тождественности этих комет.

В этом заключается критерий Тиссерана [1896], указанный им в 1889 г. и несколько уточненный Калландро [1892].

Следует заметить, что вычисления по формулам (6.5) или (6.8) можно сделать несколько более точными, если наклон кометной орбиты i взять относительно плоскости орбиты Юпитера, а не относительно плоскости эклиптики. Можно также учесть малую величину δ, что не требует большого труда.

§ 7. Применение ограниченной задачи к изучению движения комет

Окончательная орбита непериодической (или долгопериодической) кометы, полученная из всей совокупности наблюдений, представляет собой оскулирующую орбиту для одного из тех моментов, когда комета находилась в центральной области солнечной системы, ограниченной, примерно, орбитой Марса.

Приблизительно для 70% наблюдавшихся до настоящего времени комет такие оскулирующие орбиты оказались практически параболическими или даже слегка гиперболическими ($1 < e < 1{,}002$). Для решения вопроса о принадлежности этих комет (а также тех, эксцентриситеты которых лишь немного меньше единицы) к солнечной системе нужно найти форму орбит, по которым они двигались на столь еще большом расстоянии от Солнца, что всю солнечную систему можно принимать за одну материальную точку. Орбиту кометы, удовлетворяющую этому условию, мы будем называть **входной орбитой**. Аналогично, **выходной орбитой** будем называть орбиту, по которой комета движется, уйдя на такое расстояние от солнечной системы, что притяжение солнечной системы становится эквивалентным притяжению материальной точки.