наблюдается, т. е. находится недалеко от Солнца. В этом случае ξ и η — величины малые, тогда как ρ мало отличается от a'. Поскольку, далее,

$$m' = 0{,}000954786, \quad a' = 5{,}203, \tag{6.7}$$

величиной δ пренебрегают и ограничиваются вычислением величины

$$\Gamma = a^{-1} + 0{,}16860\sqrt{p}\cos i, \tag{6.8}$$

носящей название инварианта кометы.

Таким образом, вместо постоянной Якоби, определяемой равенством (6.1), можно пользоваться инвариантом (6.8).

Достаточная близость инвариантов двух комет является необходимым (но, очевидно, недостаточным) условием тождественности этих комет.

В этом заключается критерий Тиссерана [1896], указанный им в 1889 г. и несколько уточненный Калландро [1892].

Следует заметить, что вычисления по формулам (6.5) или (6.8) можно сделать несколько более точными, если наклон кометной орбиты i взять относительно плоскости орбиты Юпитера, а не относительно плоскости эклиптики. Можно также учесть малую величину δ, что не требует большого труда.

§ 7. Применение ограниченной задачи к изучению движения комет

Окончательная орбита непериодической (или долгопериодической) кометы, полученная из всей совокупности наблюдений, представляет собой оскулирующую орбиту для одного из тех моментов, когда комета находилась в центральной области солнечной системы, ограниченной, примерно, орбитой Марса.

Приблизительно для 70% наблюдавшихся до настоящего времени комет такие оскулирующие орбиты оказались практически параболическими или даже слегка гиперболическими ($1 < e < 1{,}002$). Для решения вопроса о принадлежности этих комет (а также тех, эксцентриситеты которых лишь немного меньше единицы) к солнечной системе нужно найти форму орбит, по которым они двигались на столь еще большом расстоянии от Солнца, что всю солнечную систему можно принимать за одну материальную точку. Орбиту кометы, удовлетворяющую этому условию, мы будем называть входной орбитой. Аналогично, выходной орбитой будем называть орбиту, по которой комета движется, уйдя на такое расстояние от солнечной системы, что притяжение солнечной системы становится эквивалентным притяжению материальной точки.

Вычисление входных орбит, начатое Трэном в 1894 г., было организовано в широком масштабе Э. Стрёмгреном в 1898 г., а затем продолжено многими исследователями. В настоящее время оно выполнено практически для всех комет, имеющих достаточно надежные исходные орбиты.

Полученные результаты можно найти в работах М. А. Дирикиса [1956] и И. В. Галибиной [1958]. Они показывают, что из 26 комет, для которых могла быть найдена надежная входная орбита, только у трех комет она получилась гиперболической. Однако и в этих трех случаях гиперболичность орбиты не может считаться вполне установленной, так как возможная погрешность полученного эксцентриситета того же порядка, как и его отклонение от единицы. Во всяком случае, решение вопроса о происхождении кометы, у которой эксцентриситет окончательной орбиты близок к единице, может быть получено лишь путем выяснения формы входной орбиты.

Форма орбиты определяется знаком большой полуоси. Обозначим через $a_{-\infty}$ большую полуось входной орбиты и положим

$$\Delta_1 = 1/a_{-\infty} - 1/a,$$

где a — большая полуось окончательной орбиты кометы.

Если величины Δ_1 для тех 26 комет, для которых получены наиболее надежные входные орбиты, трактовать как случайные, то в среднем получается

$$\Delta_1 = +0{,}000571 \pm 0{,}000050. \tag{7.1}$$

Таким образом, у рассматриваемой группы комет орбиты становятся в среднем, если можно так выразиться, «более гиперболическими», когда эти кометы попадают во внутренние области солнечной системы.

Если для известных в настоящее время выходных орбит [Галибина, 1958] вычислить аналогичную величину

$$\Delta_2 = 1/a - 1/a_{\infty},$$

то получим

$$\Delta_2 = -0{,}000473 \pm 0{,}000106. \tag{7.2}$$

Свойства входных и выходных орбит, выражаемые полученными значениями Δ_1 и Δ_2, могут быть выведены из интеграла Якоби при помощи следующего приема, примененного Синдингом [1948] для изучения входных орбит.

В предыдущем параграфе, введя гелиоцентрическую координатную систему $S\xi\eta\zeta$ с неизменными направлениями осей, мы получили интеграл Якоби в форме (6.3). Если взять барицентрическую систему $S\xi_0\eta_0\zeta_0$ с теми же направлениями осей, то формулы преобразования будут отличаться от (6.2) только тем, что в них будет $d_1=0$. Таким образом, в этой системе вместо (6.3) будем иметь

$$\dot{\xi}_0^2+\dot{\eta}_0^2+\dot{\zeta}_0^2-2n'(\xi_0\dot{\eta}_0-\eta_0\dot{\xi}_0)=2k^2\left(\frac{1}{r}+\frac{m'}{\rho}\right)-C.$$

Если через a_0, p_0, i_0, ... обозначить элементы барицентрической оскулирующей орбиты, а через r_0 — барицеитрический радиус-вектор, то

$$\dot{\xi}_0^2+\dot{\eta}_0^2+\dot{\zeta}_0^2=k^2(1+m')\left(\frac{2}{r_0}-\frac{1}{a_0}\right),$$

$$\xi_0\dot{\eta}_0-\eta_0\dot{\xi}_0=k\sqrt{1+m'}\sqrt{p_0}\cos i_0.$$

Подставим эти выражения в предыдущее равенство и применим его к положению кометы иа очень большом расстоянии от Солнца, когда r, r_0 и ρ весьма велики. Введя опять величины (6.4), будем иметь

$$\frac{1}{1+m'}\Gamma=\frac{1}{a_0}+\frac{2}{a'^{3/2}}\sqrt{p_0}\cos i_0.$$

Если из этого равенства вычесть почленно (6.5) и положить

$$\Delta=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a}, \tag{7.3}$$

то получим

$$\Delta=\frac{-m'}{1+m'}\Gamma-\frac{2}{a'^{3/2}}\left[\sqrt{p_0}\cos i_0-\sqrt{(1+m')p}\cos i\right]+\delta.$$

Так как при переходе от одной кометы к другой измеиения первых двух членов этого выражения носят случайный характер, то можно считать, что среднее значеиие Δ равно среднему зиачению третьего члена, т. е. величины δ, определяемой формулой (6.6).

Учитывая (6.2), выражение (6.6) можно написать так:

$$\delta=\frac{m'^2}{(1+m')a'}+\frac{2m'}{\rho}-\frac{2m'}{a'^2}(x+d_1).$$

Но из треугольника SJP, в котором $SJ=a'$, $SP=r$, $PJ=\rho$, а проекция SP на SJ равна $x+d_1$, имеем

$$2a'(x+d_1)=r^2+a'^2-\rho^2.$$

Поэтому предыдущее выражение можно заменить таким:

$$\delta=\frac{-m'}{(1+m')a'}+\frac{2m'}{\rho}-\frac{m'}{a'^3}(r^2-\rho^2).$$

Стоящие здесь значения r и ρ соответствуют той области солнечной системы, в которой кометы наблюдаются. Таким образом, для вычисления среднего значения δ, равного среднему значению Δ_m разности (7.3), можно взять $r=1$, $\rho=a'$. Это дает

$$\Delta_m=\frac{2m'+3m'^2}{1+m'}\frac{1}{a'}-\frac{m'}{a'^3}. \tag{7.4}$$

Подставив сюда значения (6.7), соответствующие Юпитеру, получим

$$\Delta_m=0{,}000\,3604.$$

Для значений

$$m'=0{,}000\,28558, \qquad a'=9{,}539,$$

соответствующих Сатурну, мы имели бы

$$\Delta_m=0{,}000\,0596.$$

Если считать допустимым простое сложение величин, соответствующих двум планетам, то окончательно получается

$$\Delta_m=0{,}000\,420.$$

Такое значение достаточно хорошо согласуется со значениями (7.1) и (7.2), полученными для действительно наблюдавшихся комет.

§ 8. Движение вблизи коллинеарных центров либрации

Обратимся к уравнениям (3.3) движения бесконечно малой массы P, имеющим вид

$$\ddot{x}-2n\dot{y}=\Omega_x; \quad \ddot{y}+2n\dot{x}=\Omega_y; \quad \ddot{z}=\Omega_z. \tag{8.1}$$

Выбрав единицы так, чтобы было

$$k^2=1, \quad n^2=m_1+m_2=1,$$

и положив

$$m_1=1-\mu, \quad m_2=\mu,$$

будем иметь

$$\Omega=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}. \tag{8.2}$$

Чтобы изучить движение в области центра либрации $L_h(a_h, b_h, c_h)$, положим

$$x=a_h+\xi, \quad y=b_h+\eta, \quad z=c_h+\zeta. \tag{8.3}$$

Функция (8.2) в точках L_h голоморфна. Поэтому, разлагая правые части уравнений (8.1) по степеням малых величин ξ, η, ζ