нию Δ_m разности (7.3), можно взять $r=1$, $\rho=a'$. Это дает

$$\Delta_m = \frac{2m'+3m'^2}{1+m'}\frac{1}{a'} - \frac{m'}{a'^3}. \tag{7.4}$$

Подставив сюда значения (6.7), соответствующие Юпитеру, получим

$$\Delta_m = 0{,}000\,3604.$$

Для значений

$$m' = 0{,}000\,28558, \qquad a' = 9{,}539,$$

соответствующих Сатурну, мы имели бы

$$\Delta_m = 0{,}000\,0596.$$

Если считать допустимым простое сложение величин, соответствующих двум планетам, то окончательно получается

$$\Delta_m = 0{,}000\,420.$$

Такое значение достаточно хорошо согласуется со значениями (7.1) и (7.2), полученными для действительно наблюдавшихся комет.

§ 8. Движение вблизи коллинеарных центров либрации

Обратимся к уравнениям (3.3) движения бесконечно малой массы P, имеющим вид

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \Omega_x; \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \Omega_y; \quad \ddot{z} = \Omega_z. \tag{8.1}$$

Выбрав единицы так, чтобы было

$$k^2 = 1, \quad n^2 = m_1 + m_2 = 1,$$

и положив

$$m_1 = 1 - \mu, \quad m_2 = \mu,$$

будем иметь

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \tag{8.2}$$

Чтобы изучить движение в области центра либрации $L_h(a_h, b_h, c_h)$, положим

$$x = a_h + \xi, \quad y = b_h + \eta, \quad z = c_h + \zeta. \tag{8.3}$$

Функция (8.2) в точках L_h голоморфна. Поэтому, разлагая правые части уравнений (8.1) по степеням малых величин ξ, η, ζ

и учитывая условия (5.3), определяющие точки L_h, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}-2\dot{\eta}&=\xi\Omega^2_{a_h a_h}+\eta\Omega^2_{a_h b_h}+\zeta\Omega^2_{a_h c_h},\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}&=\xi\Omega^2_{b_h a_h}+\eta\Omega^2_{b_h b_h}+\zeta\Omega^2_{b_h c_h},\\ \ddot{\zeta}&=\xi\Omega^2_{c_h a_h}+\eta\Omega^2_{c_h b_h}+\zeta\Omega^2_{c_h c_h}, \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

поскольку вторыми степенями ξ, η, ζ здесь можно пренебречь.

Для коллинеарных центров либрации L_1, L_2, L_3 мы имеем $b_h=c_h=0$, чем существенно упрощается вычисление вторых производных функции (8.2). Система (8.4) в этом случае принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}-2\dot{\eta}&=(1+2A_h)\,\xi,\\ \ddot{\eta}+2\dot{\xi}&=(1-A_h)\,\eta,\\ \ddot{\zeta}&=-A_h\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

где

$$A_h=\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3},$$

причем ($h=1$, 2, 3):

$$r_1=|a_h+\mu|;\quad r_2=|a_h-1+\mu|.$$

Последнее из уравнений (8.5) независимо от двух первых. Так как $A_h>0$, то оно дает

$$\zeta=C_1\cos\sqrt{A_h}\,t+C_2\sin\sqrt{A_h}\,t, \tag{8.6}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Частные решения двух первых уравнений ищем в форме

$$\xi=H\cos(\lambda t+\beta);\quad \eta=qH\sin(\lambda t+\beta).$$

Это дает для нахождения входящих сюда параметров такие уравнения

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2+1+2A_h+2\lambda q&=0,\\ 2\lambda+(\lambda^2+1-A_h)\,q&=0. \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Легко убедиться, что получаемое отсюда характеристическое уравнение

$$\lambda^4+\lambda^2(A_h-2)+(1+2A_h)(1-A_h)=0 \tag{8.8}$$

имеет для каждого из центров либрации L_1, L_2 и L_3 два вещественных и два чисто мнимых корня.

В самом деле, легко показать, что величина

$$1 - A_h = 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \tag{8.9}$$

в каждой из этих точек отрицательна.

Для точки L_1 это очевидно, так как

$$r_1 < 1, \qquad r_2 < 1.$$

Для точки L_2 уравнение (5.10) дает

$$\mu = \frac{r_2^5 + 3r_2^4 + 3r_2^3}{r_2^4 + 2r_2^3 + r_2^2 + 2r_2 + 1}.$$

Подставив это выражение в формулу (8.9) и учтя, что в рассматриваемом случае

$$r_1 = 1 + r_2,$$

получим

$$1 - A_2 = \frac{(r_2^3 - 1)(r_2^2 + 3r_2 + 3)}{(r_2 + 1)(r_2^4 + 2r_2^3 + r_2^2 + 2r_2 + 1)}.$$

Но эта величина отрицательна, так как здесь $r_2 < 1$.

Для точки L_3 можно аналогичным образом использовать уравнение (5.11). Впрочем, этот случай можно привести к предыдущему, если μ и r_2 заменить через $1-\mu$ и r_1.

Итак, действительно, уравнение (8.8), рассматриваемое как квадратное относительно λ^2, имеет один положительный корень и один отрицательный. Таким образом, корни этого уравнения для каждого из центров либрации L_1, L_2, L_3 имеют вид $\pm\lambda'$, $\pm\lambda'' i$, где λ' и λ'' — вещественные величины.

Вещественным корням $\pm\lambda'$ соответствует частное решение

$$\xi = H\cos(\lambda' t + \beta); \quad \eta = qH\sin(\lambda' t + \beta), \tag{8.10}$$

содержащие две произвольные постоянные H и β. Величина q находится из уравнений (8.7).

Исключение t из равенств (8.10) дает

$$q^2\xi^2 + \eta^2 = q^2H^2.$$

Таким образом, движения, соответствующие частным решениям (8.10), происходят по эллипсам различных размеров, но одной и той же формы. Легко убедиться, что для всех трех коллинеарных центров либрации $q > 1$, вследствие чего эксцентриситет каждого эллипса равен $e = \sqrt{1 - q^{-2}}$, а большая ось перпендикулярна к оси абсцисс, т. е. к прямой, на которой расположены конечные массы.

Прилагаемая таблица дает отношение осей q и эксцентриситет e рассматриваемых эллипсов для трех значений отношения масс тел S и J; третье из этих значений соответствует системе Земля — Солнце. Из этой таблицы видно, как мало зависит форма бесконечно малых орбит (8.10) от отношения масс.

Наличие у характеристического уравнения (8.8) мнимых корней показывает, что все коллинеарные центры либрации являются неустойчивыми положениями относительного равновесия. В частности, бесконечно малые периодические орбиты (8.10) неустойчивы.

Форма бесконечно малых эллиптических орбит вокруг коллинеарных центров либрации

		L_1		L_2		L_3	
m_2/m_1	μ	q	e	q	e	q	e
1	0,5	4,387	0,974	2,221	0,893	2,221	0,893
0,1	0,090909	3,988	0,968	2,659	0,929	2,015	0,869
1 : 330000	0,000003	3,227	0,951	3,187	0,951	2,000	0,867

Дальнейшие сведения о движении вблизи коллинеарных центров либрации можно найти у Шарлье [1907]. Доказано существование в области этих центров периодических орбит конечного размера [Мультон, 1920].

§ 9. Движение вблизи тригональных центров либрации

Обратимся теперь к изучению движеиия в области тригональных центров либрации L_4 и L_5, положение которых дается формулами (§ 5):

$$a_h = \frac{1}{2} - \mu; \quad b_h = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c_h = 0,$$

где $h = 4,5$.

Уравнения движения (8.4) в этом случае принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = R\xi + S\eta; \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = S\xi + T\eta, \\ \ddot{\zeta} = -\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

где

$$R = \frac{3}{4}; \quad S = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu); \quad T = \frac{9}{4}.$$

Общий интеграл последнего из уравнений (9.1)

$$\zeta = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$