Прилагаемая таблица дает отношение осей q и эксцентриситет e рассматриваемых эллипсов для трех значений отношения масс тел S и J; третье из этих значений соответствует системе Земля — Солнце. Из этой таблицы видно, как мало зависит форма бесконечно малых орбит (8.10) от отношения масс.

Наличие у характеристического уравнения (8.8) мнимых корней показывает, что все коллинеарные центры либрации являются неустойчивыми положениями относительного равновесия. В частности, бесконечно малые периодические орбиты (8.10) неустойчивы.

Форма бесконечно малых эллиптических орбит вокруг коллинеарных центров либрации

		L_1		L_2		L_3	
m_2/m_1	μ	q	e	q	e	q	e
1	0,5	4,387	0,974	2,221	0,893	2,221	0,893
0,1	0,090909	3,988	0,968	2,659	0,929	2,015	0,869
1 : 330000	0,000003	3,227	0,951	3,187	0,951	2,000	0,867

Дальнейшие сведения о движении вблизи коллинеарных центров либрации можно найти у Шарлье [1907]. Доказано существование в области этих центров периодических орбит конечного размера [Мультон, 1920].

§ 9. Движение вблизи тригональных центров либрации

Обратимся теперь к изучению движеиия в области тригональных центров либрации L_4 и L_5, положение которых дается формулами (§ 5):

$$a_h = \frac{1}{2} - \mu; \quad b_h = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c_h = 0,$$

где $h = 4,5$.

Уравнения движения (8.4) в этом случае принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = R\xi + S\eta; \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = S\xi + T\eta, \\ \ddot{\zeta} = -\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

где

$$R = \frac{3}{4}; \quad S = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu); \quad T = \frac{9}{4}.$$

Общий интеграл последнего из уравнений (9.1)

$$\zeta = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, показывает, что тело P совершает периодические колебания с периодом 2π относительно плоскости xy. Период этого колебания совпадает с периодом обращения конечных масс S и J вокруг центра инерции.

Если положить

$$F=R\xi^2+2S\xi\eta+T\eta^2,$$

то первым двум из уравнений (9.1) можно придать следующую форму:

$$\ddot{\xi}-2\dot{\eta}=\frac{1}{2}F_{\xi};\quad \ddot{\eta}+2\dot{\xi}=\frac{1}{2}F_{\eta}. \tag{9.2}$$

Отсюда сразу вытекает наличие первого интеграла

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2=F-C.$$

Таким образом, в пределах принятой нами точности, кривыми нулевой скорости являются конические сечения

$$R\xi^2+2S\xi\eta+T\eta^2=C \tag{9.3}$$

с центром в точке либрации.

Приведем уравнение (9.3) к каноническому виду

$$A\xi_1^2+B\eta_1^2=C.$$

Для этого нужно, как известно, повернуть координатные оси на угол θ, определяемый формулой

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2S}{R-T}=\mp\sqrt{3}\,(1-2\mu).$$

Новые координаты выразятся при этом через старые формулами

$$\xi_1=\xi\cos\theta+\eta\sin\theta;\quad \eta_1=-\xi\sin\theta+\eta\cos\theta,$$

а коэффициенты A и B найдутся как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} R-\omega & S \\ S & T-\omega \end{vmatrix}=0,$$

или, в развернутом виде,

$$\omega^2-3\omega+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0. \tag{9.4}$$

В новых координатах уравнения (9.2) будут иметь более простую форму:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}_1-2\dot{\eta}_1&=\frac{1}{2}F_{\xi_1}=A\xi_1,\\ \ddot{\eta}_1+2\dot{\xi}_1&=\frac{1}{2}F_{\eta_1}=B\eta_1. \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Если решение этих уравнений искать в форме

$$\xi_1 = H\cos(\lambda t + \beta); \quad \eta_1 = qH\sin(\lambda t + \beta),$$

то для нахождения входящих сюда параметров будем иметь соотношения

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 + A + 2\lambda q &= 0, \\ 2\lambda + (\lambda^2 + B) q &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

Таким образом, частота λ определяется уравнением

$$\lambda^4 + \lambda^2(A + B - 4) + AB = 0,$$

которое на основании (9.4) можно написать так:

$$\lambda^4 - \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0. \tag{9.7}$$

Если корни этого уравнения обозначить через $\pm\lambda'$ и $\pm\lambda''$, то соответствующие частные решения уравнений (9.5) будут

$$\xi_1 = H'\cos(\lambda' t + \beta'); \quad \eta_1 = q'H'\sin(\lambda' t + \beta'), \tag{9.8}$$

$$\xi_1 = H''\cos(\lambda'' t + \beta''); \quad \eta_1 = q''H''\sin(\lambda'' t + \beta''). \tag{9.9}$$

Здесь H', β', H'', β'' являются произвольными постоянными, а q' и q'' определяются уравнениями (9.6).

Таким образом, всякое движение тела P, достаточно близкое к точкам либрации L_4 и L_5, складывается из движений (9.8) и (9.9). Характер этого движения определяется характером корней уравнеиия (9.7), т. е. величин

$$\lambda' = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{M}\right]^{1/2}; \quad \lambda'' = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{M}\right]^{1/2},$$

где

$$M = 1 - 27\mu(1-\mu).$$

Величина M обращается в нуль для $\mu = \mu_0$, где

$$\mu_0 = \frac{1}{18}(9 - \sqrt{69}) = 0{,}038520896\ \ldots$$

и для $\mu = 1 - \mu_0$.

Таким образом, в интервалах $(0, \mu_0)$ и $(1-\mu_0, 1)$ корни уравнения (9.7) вещественны, а потому движение, определяемое формулами (9.8) и (9.9), устойчиво.

Если же $\mu_0 < \mu < 1-\mu_0$, то λ' и λ'' являются комплексными числами и движение неустойчиво. Если, наконец, $\mu = \mu_0$ или $\mu = 1-\mu_0$, то $\lambda' = \lambda''$. В этом случае, наряду с движением по эллипсу, даваемым формулами (9.8) или (9.9), уравнения (9.5) будут иметь еще частное решение

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= K(t-t_0)\sin\frac{t-t_0}{\sqrt{2}}, \\ \eta_1 &= K(\sqrt{2}-1)\left[(t-t_0)\cos\frac{t-t_0}{\sqrt{2}}+\sin\frac{t-t_0}{\sqrt{2}}\right], \end{aligned}\right\} \quad (9.10)$$

содержащее произвольные постоянные K и t_0. Таким образом, при $\mu=\mu_0$ и при $\mu=1-\mu_0$ движение также неустойчиво.

Прилагаемая таблица содержит величины, характеризующие те два эллиптические движения (9.8) и (9.9), из которых слагается всякое движение в области центров либрации L_4 и L_5, если $0\leqslant\mu<\mu_0$. При $\mu=\mu_0$ происходит слияние этих двух эллиптических движений в одно и появление непериодического движения (9.10).

Из таблицы видно, что чем меньше μ, тем более точно большие оси рассматриваемых эллипсов направлены по касательной к окружности, описываемой телом J вокруг S.

Параметры, характеризующие движение в области центров либрации L_4 и L_5

μ	$\mp\theta$	λ'	$-q'$	λ''	$-q''$
0,000	30°,000	1,00000	0,50000	0,00000	0,00000
0,004	29,900	0,98607	0,49760	0,16630	0,11018
0,008	29,799	0 97119	0,49485	0,23831	0,15686
0,012	29,697	0,95513	0,49165	0,29618	0,19353
0,016	29,593	0,93761	0,48793	0,34769	0,22542
0,020	29,489	0,91819	0,48348	0,39614	0,25458
0,024	29,382	0,89618	0,47804	0,44370	0,28233
0,028	29,275	0,87033	0,47109	0,49247	0,30973
0,032	29,166	0,83801	0,46160	0,54565	0,33825
0,036	29,056	0,79088	0,44616	0,61197	0,37152
μ_0	28,986	0,70711	0,41421	0,70711	0,41421

Дальнейшие сведения относительно бесконечно малых орбит вблизи тригональных центров либрации можно найти в книгах, указанных в конце предыдущего параграфа, а также в статье Пламмера [1932]. Периодические орбиты конечного размера, охватывающие эти центры, изучались Мультоном [1920] при помощи метода малого параметра, а затем Ю. А. Рябовым [1952], использовавшим метод Ляпунова. Эти методы позволили доказать существование семейств периодических орбит.

Для нахождения изолированных периодических орбит с успехом использовалось и численное интегрирование (см. § 16).