§ 10. Движение вблизи конечных масс

Точки S и J, в которых находятся конечные массы, являются особыми точками функции Ω, фигурирующей в уравнениях (8.2). Изучение движения бесконечно малой массы P вблизи S и J является поэтому гораздо более сложной задачей, нежели изучение ее движения вблизи центров либрации.

Мы ограничимся рассмотрением лишь одного специального случая этой задачи, имеющего непосредственное применение при изучении движения спутников планет.

Массы тел S (Солнце) и J (планета) обозначим, как и раньше, соответственно через m_1 и m_2. Расстояние SJ обозначим через a. За начало координатной системы примем теперь не барицентр системы, а точку J. Прямая JS, служащая осью абсцисс, будет вращаться в плоскости Jxy с постоянной угловой скоростью n', определяемой равеиством

$$n'^2 a^3 = k^2 (m_1 + m_2). \tag{10.1}$$

Уравнения движения бесконечно малой массы P, с координатами x, y, z, имеют вид (ср. § 3):

$$\ddot{x} - 2n'\dot{y} = \Omega_x; \quad \ddot{y} + 2n'\dot{x} = \Omega_y; \quad \ddot{z} = \Omega_z, \tag{10.2}$$

где

$$\Omega = k^2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2), \tag{10.3}$$

причем

$$r_1 = (x - a)^2 + y^2 + z^2; \quad r_2^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

В рассматриваемом нами случае $r_2 \ll a$, поэтому в разложении

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{r_2^2}{a^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{r_2^2}{a^3} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{a^3} + \ldots$$

мы можем ограничиться четырьмя написанными членами.

Таким образом, учитывая (10.1), окончательно будем иметь

$$\Omega = n'^2\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}z^2\right) + \frac{k^2 m_2}{r_2}. \tag{10.4}$$

Переход от (10.3) к (10.4) есть не что иное, как переход к пределу, когда величины a и m_1, связанные соотношением (10.1) стремятся к бесконечности.

Подстановка выражения (10.4) в уравнения (10.2) дает

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} - 2n'\dot{y} - 3n'^2 x + k^2 m_2 x r_2^{-3} = 0, \\ &\ddot{y} + 2n'\dot{x} \qquad\quad + k^2 m_2 y r_2^{-3} = 0, \\ &\ddot{z} \qquad\quad + \; n'^2 z + k^2 m_2 z r_2^{-3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

Чтобы стандартизировать период обращения спутника, целесообразно ввести в эти уравнения параметр n, полагая

$$\tau = (n - n')(t - t_0).$$

Тогда уравнения движения примут следующую окончательную форму:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} - 3m^2x + \varkappa x r^{-3} = 0,\\
&\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} \qquad\qquad + \varkappa y r^{-3} = 0,\\
&\frac{d^2z}{d\tau^2} \qquad\qquad + \quad m^2z + \varkappa z r^{-3} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

где

$$m = \frac{n'}{n - n'}; \quad \varkappa = \frac{k^2m_2}{(n - n')^2}; \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Механическую задачу, соответствующую уравнениям (10.5) или (10.6), мы будем называть *задачей Хилла*. Решения этой задачи, являющейся предельным случаем (иначе говоря, случаем вырождения) ограниченной задачи трех тел, дают *промежуточные орбиты*, т. е. такие орбиты, в которых уже учтена какая-то часть возмущающего действия Солнца на спутник. Такого рода орбиты во многих случаях являются более выгодным исходным приближением при изучении движения спутника, нежели кеплеров эллипс. Частное решение уравнений (10.6), найденное Хиллом [1878], явилось основой наиболее совершенной теории движения Луны. Это решение мы рассмотрим подробно в следующих параграфах.

Легко видеть, что для уравнений (10.5) интеграл Якоби имеет вид

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n'^2(3x^2 - z^2) + 2k^2m_2r^{-1} - C.$$

Таким образом, поверхность нулевой скорости дается здесь уравнением

$$n'^2(3x^2 - z^2) + 2k^2m_2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = C.$$

Хагихара [1952] использовал это уравнение (в случае плоской задачи Хилла, когда $z = 0$) для изучения устойчивости (по Хиллу) всех спутников солнечной системы.

Примечание. Если масса спутника P составляет заметную долю массы планеты J, то под m_2 следует понимать сумму масс планеты и спутника. Так поступают, например, при изучении движения Луны.