§ 11. Преобразование уравнений

Чтобы облегчить решение уравнений (10.6) способом неопределенных коэффициентов, Хилл подверг эти уравнения следующим преобразованиям.

Введем, прежде всего, вместо неизвестных x и y комплексные величины

$$u = x + yi, \quad s = x - yi.$$

Это позволит заменить первые два из уравнений (10.6) такими:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{d\tau^2} + 2mi\frac{du}{d\tau} + \frac{\varkappa u}{r^3} - \frac{3}{2}m^2(u+s) = 0,\\ &\frac{d^2s}{d\tau^2} - 2mi\frac{ds}{d\tau} + \frac{\varkappa s}{r^3} - \frac{3}{2}m^2(u+s) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

Введем, далее, новую независимую переменную

$$\zeta = \exp(\tau i).$$

Так как

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\zeta}{d\tau}\frac{d}{d\zeta} = i\zeta\frac{d}{d\zeta},$$

то, пользуясь оператором

$$D = \zeta\frac{d}{d\zeta},$$

мы получим уравнения (10.6) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &D^2u + 2mDu + \frac{3}{2}m^2(u+s) - \varkappa ur^{-3} = 0,\\ &D^2s - 2mDs + \frac{3}{2}m^2(u+s) - \varkappa sr^{-3} = 0,\\ &D^2z - m^2z - \varkappa zr^{-3} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

где $r^2 = us + z^2$.

Для уравнений (10.6) интеграл Якоби имеет такой вид:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = m^2(3x^2 - z^2) + \frac{2\varkappa}{r} - C,$$

или, после введения новых переменных,

$$Du \cdot Ds + (Dz)^2 + \frac{3}{4}m^2(u+s)^2 - m^2z^2 + \frac{2\varkappa}{r} = C. \tag{11.3}$$

Это соотношение позволяет дать для случая плоской задачи Хилла уравнения, не содержащие членов с r^{-3}, весьма затрудняющих применение способа неопределенных коэффициентов.

В самом деле, если равенства (11.2) умножить по порядку на s, u, $2z$ и почленно сложить, то получим

$$sD^2u + uD^2s + 2zD^2z - 2m(uDs - sDu) + \\ + \frac{3}{2}m^2(u+s)^2 - 2m^2z^2 - \frac{2\varkappa}{r} = 0.$$

Почленное прибавление к этому уравнению соотношения (11.3) дает первое из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} D^2(us + z^2) - Du \cdot Ds - (Dz)^2 - 2m(uDs - sDu) + \\ + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 - 3m^2z^2 = C, \\ D(uDs - sDu) - 2mD(us) + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (11.4)$$

Второе из этих уравнений получается, если уравнения (11.2) умножить соответственно на $-s$, $+u$, 0 и сложить.

В случае плоской задачи Хилла, когда $z=0$, уравнения (11.4) позволяют найти неизвестные u и s. Полученное решение будет заключать постоянную C, не фигурирующую в исходных уравнениях (11.2). Но если это решение подставить в интеграл (11.3), принимающий здесь вид

$$Du \cdot Ds + \frac{3}{4}m^2(u+s)^2 + \frac{2\varkappa}{\sqrt{us}} = C, \qquad (11.5)$$

то получим соотношение между $\varkappa$ и C, позволяющее исключить C.

§ 12. Периодические орбиты Хилла

В случае плоской задачи уравнения (10.6) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} + \varkappa x r^{-3} = 3m^2x, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} + \varkappa y r^{-3} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

где

$$\tau = (n - n')(t - t_0); \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Каждое периодическое решение этих уравнений, имеющее период 2π, дает периодическое движение спутника (относительно употребляемой нами вращающейся системы осей) с периодом $2\pi/(n-n')$. Иначе говоря, среднее синодическое движение спутника, соответствующее такому решению, будет равно $n-n'$. А так как n' есть среднее сидерическое планетоцентрическое движение Солнца, то введенная нами (§ 10) постоянная n есть среднее сидерическое (планетоцентрическое) движение спутника.