В самом деле, если равенства (11.2) умножить по порядку на s, u, $2z$ и почленно сложить, то получим

$$sD^2u + uD^2s + 2zD^2z - 2m(uDs - sDu) + \\ + \frac{3}{2}m^2(u+s)^2 - 2m^2z^2 - \frac{2\varkappa}{r} = 0.$$

Почленное прибавление к этому уравнению соотношения (11.3) дает первое из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} D^2(us+z^2) - Du\cdot Ds - (Dz)^2 - 2m(uDs - sDu) + \\ + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 - 3m^2z^2 = C, \\ D(uDs - sDu) - 2mD(us) + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (11.4)$$

Второе из этих уравнений получается, если уравнения (11.2) умножить соответственно на $-s$, $+u$, 0 и сложить.

В случае плоской задачи Хилла, когда $z=0$, уравнения (11.4) позволяют найти неизвестные u и s. Полученное решение будет заключать постоянную C, не фигурирующую в исходных уравнениях (11.2). Но если это решение подставить в интеграл (11.3), принимающий здесь вид

$$Du\cdot Ds + \frac{3}{4}m^2(u+s)^2 + \frac{2\varkappa}{\sqrt{us}} = C, \quad (11.5)$$

то получим соотношение между $\varkappa$ и C, позволяющее исключить C.

§ 12. Периодические орбиты Хилла

В случае плоской задачи уравнения (10.6) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} + \varkappa x r^{-3} = 3m^2x, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} + \varkappa y r^{-3} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (12.1)$$

где

$$\tau = (n - n')(t - t_0); \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Каждое периодическое решение этих уравнений, имеющее период 2π, дает периодическое движение спутника (относительно употребляемой нами вращающейся системы осей) с периодом $2\pi/(n-n')$. Иначе говоря, среднее синодическое движение спутника, соответствующее такому решению, будет равно $n-n'$. А так как n' есть среднее сидерическое планетоцентрическое движение Солнца, то введенная нами (§ 10) постоянная n есть среднее сидерическое (планетоцентрическое) движение спутника.

Следуя Хиллу, будем искать периодические, с периодом 2π, решения системы (12.1) в форме

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1 \cos\tau + A_3 \cos 3\tau + A_5 \cos 5\tau + \ldots, \\ y &= A_1' \sin\tau + A_3' \sin 3\tau + A_5' \sin 5\tau + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{12.2}$$

Соответствующие им траектории симметричны относительно каждой из осей координат и пересекают обе оси под прямым углом.

После перехода к переменным u, s и ζ равенства (12.2) дают

$$u = \sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{2}(A_{2k+1} + A'_{2k+1})\zeta^{2k+1} + \frac{1}{2}(A_{2k+1} - A'_{2k+1})\zeta^{-2k-1} \right\},$$

$$s = \sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{2}(A_{2k+1} - A'_{2k+1})\zeta^{2k+1} + \frac{1}{2}(A_{2k+1} + A'_{2k+1})\zeta^{-2k-1} \right\}.$$

Положив

$$A_{2k+1} = \mathrm{a}(a_k + a_{-k-1}); \quad A'_{2k+1} = \mathrm{a}(a_k - a_{-k-1}),$$

будем иметь

$$u = \mathrm{a}\sum a_k \zeta^{2k+1}; \quad s = \mathrm{a}\sum a_{-k-1}\zeta^{2k+1}, \tag{12.3}$$

где индекс k принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Значение общего множителя a мы определим условием $a_0 = 1$.

Для нахождения u и s уравнения (11.4) дают

$$\left.\begin{aligned} D^2(us) - Du \cdot Ds - 2m(uDs - sDu) + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 &= C, \\ D(uDs - sDu) - 2mD(us) + \frac{3}{4}m^2(u^2 - s^2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

Чтобы облегчить подстановку разложений (12.3) в соотношения (12.4), вычислим предварительно входящие в них отдельные выражения. Легко видеть, что

$$us = \mathrm{a}^2 \sum_k a_k \zeta^{2k+1} \sum_h a_{-h-1}\zeta^{2h+1} = \mathrm{a}^2 \sum_l \sum_k a_k a_{k-l} \zeta^{2l}.$$

Индексы как здесь, так и в дальнейшем принимают все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким же путем

$$u^2 = \mathrm{a}^2 \sum_l \sum_k a_k a_{l-k-1} \zeta^{2l}; \quad s^2 = \mathrm{a}^2 \sum_l \sum_k a_{-k-1} a_{k-l} \zeta^{2l}.$$

Равенства

$$Du = \mathrm{a}\sum_k (2k+1) a_k \zeta^{2k+1}; \quad Ds = \mathrm{a}\sum_k (2k+1) a_{-k-1}\zeta^{2k+1}$$

дают

$$Du \cdot Ds = \mathrm{a}^2 \sum_i \sum_k (2k+1)(2i-2k-1)\, a_k a_{k-i} \zeta^{2i},$$

$$uDs - sDu = 2\mathrm{a}^2 \sum_i \sum_k (i-2k-1)\, a_k a_{k-i} \zeta^{2i},$$

наконец,

$$D^2(us) = \mathrm{a}^2 \sum_i \sum_k 4i^2 a_k a_{k-i} \zeta^{2i}.$$

Подставив эти выражения в уравнения (12.4) и приравняв коэффициенты при ζ^{2i}, получим такие зависимости между коэффициентами рядов (12.3):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_k \left[4i^2 + (2k+1)(2k-2i+1) + 4(2k-i+1)m + \frac{9}{2}m^2\right]\times \\
&\qquad\qquad \times a_k a_{k-i} + \frac{9}{4} m^2 \sum_k a_k (a_{i-k-1} + a_{-i-k-1}) = 0, \\
&4i \sum_k (2k-i+1+m)\, a_k a_{k-i} - \\
&\qquad\qquad - \frac{3}{2} m^2 \sum_k a_k (a_{i-k-1} - a_{-i-k-1}) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

Заметим, что при $i=0$ первое из этих соотношений должно быть заменено таким:

$$\sum_k \left[(2k+1)^2 + 4(2k+1)m + \frac{9}{2}m\right] a_k^2 + \frac{9}{2} m^2 \sum_k a_k a_{-k-1} = \mathrm{a}^{-2} C, \tag{12.6}$$

тогда как второе обращается в тождество.

Задача иахождеиия периодического решения вида (12.2) приводится, таким образом, к нахождению коэффициентов a_k из уравнений (12.5).

§ 13. Вычисление коэффициентов

Для каждого неравного нулю значеиия индекса i уравнения (12.5), определяющие коэффициенты, могут быть заменены одним уравнением.

В самом деле, если эти уравнения почленно сложить, помножив их предварительно сиачала на $+2$ и $+3$, а затем на $+2$