дают

$$Du \cdot Ds = \mathrm{a}^2 \sum_i \sum_k (2k+1)(2i-2k-1)\, a_k a_{k-i} \zeta^{2i},$$

$$uDs - sDu = 2\mathrm{a}^2 \sum_i \sum_k (i-2k-1)\, a_k a_{k-i} \zeta^{2i},$$

наконец,

$$D^2(us) = \mathrm{a}^2 \sum_i \sum_k 4i^2 a_k a_{k-i} \zeta^{2i}.$$

Подставив эти выражения в уравнения (12.4) и приравняв коэффициенты при ζ^{2i}, получим такие зависимости между коэффициентами рядов (12.3):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k \left[4i^2 + (2k+1)(2k-2i+1) + 4(2k-i+1)m + \frac{9}{2}m^2\right]\times \\ &\qquad\qquad \times a_k a_{k-i} + \frac{9}{4}m^2 \sum_k a_k (a_{i-k-1} + a_{-i-k-1}) = 0, \\ &4i \sum_k (2k-i+1+m)\, a_k a_{k-i} - \\ &\qquad\qquad - \frac{3}{2}m^2 \sum_k a_k (a_{i-k-1} - a_{-i-k-1}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

Заметим, что при $i=0$ первое из этих соотношений должно быть заменено таким:

$$\sum_k \left[(2k+1)^2 + 4(2k+1)m + \frac{9}{2}m\right] a_k^2 + \frac{9}{2}m^2 \sum_k a_k a_{-k-1} = \mathrm{a}^{-2}C, \tag{12.6}$$

тогда как второе обращается в тождество.

Задача иахождеиия периодического решения вида (12.2) приводится, таким образом, к нахождению коэффициентов a_k из уравнений (12.5).

§ 13. Вычисление коэффициентов

Для каждого неравного нулю значеиия индекса i уравнения (12.5), определяющие коэффициенты, могут быть заменены одним уравнением.

В самом деле, если эти уравнения почленно сложить, помножив их предварительно сиачала на $+2$ и $+3$, а затем на $+2$

и —3, то получим

$$\left.\begin{aligned}&\sum_k [8k^2 - 8(4i-1)k + 20i^2 - 16i + 2 + \\ &\qquad + 4(4k-5i+2)m + 9m^2]\, a_k a_{k-i} + 9m^2 \sum_k a_k a_{i-k-1} = 0, \\ &\sum_k [8k^2 + 8(2i+1)k - 4i^2 + 8i + 2 + \\ &\qquad + 4(4k+i+2)m + 9m^2]\, a_k a_{k-i} + 9m^2 \sum_k a_k a_{i-k-1} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (13.1)$$

Легко видеть, что каждое из этих двух уравнений является следствием другого. Так, например, если в первом заменить k и i через $k-i$ и $-i$, то получим второе.

Покажем, следуя Хиллу, что при достаточно малых значениях m уравнения (13.1) имеют решение, в котором коэффициент a_i есть малая величина порядка $|m|^{|2i|}$.

Начнем с выделения в уравнениях (13.1) членов, содержащих $a_0 a_{-i}$ и $a_0 a_i$. В первом уравнении эти члены, получающиеся при $k=0$ и $k=i$, таковы:

$$[20i^2 - 16i + 2 - 4(5i-2)m + 9m^2]\, a_0 a_{-i} + \\ + [-4i^2 - 8i + 2 - (4i-8)m + 9m^2]\, a_0 a_i,$$

а во втором —

$$[-4i^2 + 8i + 2 + (4i+8)m + 9m^2]\, a_0 a_{-i} + \\ + [20i^2 + 16i + 2 + 4(5i+2)m + 9m^2]\, a_0 a_i.$$

Чтобы исключить член с произведением $a_0 a_{-i}$, умножим первое из уравнений (13.1) на

$$-4i^2 + 8i + 2 + (4i+8)m + 9m^2,$$

второе на

$$-[20i^2 - 16i + 2 - 4(5i-2)m + 9m^2]$$

и сложим полученные равенства. Результат можно написать так:

$$\sum \{[i,\, k]\, a_k a_{k-i} + [i]\, a_k a_{i-k-1} + (i)\, a_k a_{-i-k-1}\} = 0, \quad (13.2)$$

где

$$\left.\begin{aligned}&[i,\, k] = -\frac{k}{i}\, \frac{(4i-4)k + 4i^2 + 4i - 2 - 4(k-i+1)m + m^2}{8i^2 - 2 - 4m + m^2}, \\ &[i] = -\frac{3m^2}{16i^2}\, \frac{4i^2 - 8i - 2 - (4i+8)m - 9m^2}{8i^2 - 2 - 4m + m^2}, \\ &(i) = -\frac{3m^2}{16i^2}\, \frac{20i^2 - 16i + 2 - (20i-8)m + 9m^2}{8i^2 - 2 - 4m + m^2}.\end{aligned}\right\} \quad (13.3)$$

Поскольку

$$[i,\, i] = -1; \quad [i,\, 0] = 0,$$

а величины $[i]$ и (i) — второго порядка относительно параметра m, форма (13.2), к которой мы привели уравнения (12.5), является наиболее удобной для нахождения коэффициентов a_i последовательными приближениями.

В первом приближении, сохраняя лишь члены самой низкой степени относительно m, будем иметь ($a_0=1$):

$$
\begin{aligned}
a_1 &= [1]\, a_0 a_0,\\
a_{-1} &= (-1)\, a_0 a_0,\\
a_2 &= [2]\,(a_0 a_1 + a_1 a_0) + [2,\ 1]\, a_1 a_{-1},\\
a_{-2} &= (-2)\,(a_0 a_1 + a_1 a_0) + [-2, -1]\, a_1 a_{-1},\\
a_3 &= [3]\,(a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) + [3,\ 1]\, a_1 a_{-2} + [3,\ 2]\, a_2 a_{-1},\\
a_{-3} &= (-3)\,(a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) + [-3,\ -1]\, a_{-1} a_2 + [-3,\ -2]\, a_{-2} a_1,
\end{aligned}
$$

. . . .

Отсюда мы получим последовательно приближенные значения всех коэффициентов, причем для a_i получится величина порядка $|m|^{|2i|}$, имеющая ошибку по меньшей мере порядка $|m|^{|2i|+4}$.

Для второго приближения возьмем более точные соотношения:

$$
a_1 = [1]\,(a_0 a_0 + 2a_{-1} a_1) + (1)\,(a_{-1}^2 + 2a_0 a_{-2}) + \\
+ [1,\ -1]\, a_{-1} a_{-2} + [1,\ 2]\, a_2 a_1,
$$

. . . .

В правые части подставляем (для тех коэффициентов, для которых еще не получено второе приближение) значения, найденные в первом приближении.

Второе приближение даст a_i с ошибкой по меньшей мере порядка $|m|^{|2i|+8}$.

При небольших значениях $|m|$ этот процесс позволяет очень просто вычислить коэффициенты a_i с любой степенью точности и, таким образом, получить периодическое решение (12.2) в форме быстро сходящегося ряда.

§ 14. Ряды Хилла

Чтобы получить общие выражения коэффициентов a_i в функции параметра m, заметим, что величины $[i, k]$, $[i]$, (i), определяемые формулами (13.3), являются рациональными функциями m со знаменателями

$$8i^2 - 2 - 4m + m^2.$$