а величины $[i]$ и (i) — второго порядка относительно параметра m, форма (13.2), к которой мы привели уравнения (12.5), является наиболее удобной для нахождения коэффициентов a_i последовательными приближениями.

В первом приближении, сохраняя лишь члены самой низкой степени относительно m, будем иметь ($a_0=1$):

$$\begin{aligned}
a_1 &= [1]\,a_0a_0,\\
a_{-1} &= (-1)\,a_0a_0,\\
a_2 &= [2]\,(a_0a_1+a_1a_0)+[2,\ 1]\,a_1a_{-1},\\
a_{-2} &= (-2)\,(a_0a_1+a_1a_0)+[-2,-1]\,a_1a_{-1},\\
a_3 &= [3]\,(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)+[3,\ 1]\,a_1a_{-2}+[3,\ 2]\,a_2a_{-1},\\
a_{-3} &= (-3)\,(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)+[-3,\ -1]\,a_{-1}a_2+[-3,\ -2]\,a_{-2}a_1,
\end{aligned}$$

. . . .

Отсюда мы получим последовательно приближенные значения всех коэффициентов, причем для a_i получится величина порядка $|m|^{|2i|}$, имеющая ошибку по меньшей мере порядка $|m|^{|2i|+4}$.

Для второго приближения возьмем более точные соотношения:

$$a_1=[1]\,(a_0a_0+2a_{-1}a_1)+(1)\,(a_{-1}^2+2a_0a_{-2})+\\
+[1,\ -1]\,a_{-1}a_{-2}+[1,\ 2]\,a_2a_1,$$

. . . .

В правые части подставляем (для тех коэффициентов, для которых еще не получено второе приближение) значения, найденные в первом приближении.

Второе приближение даст a_i с ошибкой по меньшей мере порядка $|m|^{|2i|+8}$.

При небольших значениях $|m|$ этот процесс позволяет очень просто вычислить коэффициенты a_i с любой степенью точности и, таким образом, получить периодическое решение (12.2) в форме быстро сходящегося ряда.

§ 14. Ряды Хилла

Чтобы получить общие выражения коэффициентов a_i в функции параметра m, заметим, что величины $[i,\ k]$, $[i]$, (i), определяемые формулами (13.3), являются рациональными функциями m со знаменателями

$$8i^2-2-4m+m^2.$$

Отсюда следует, что в результате последовательных приближений a_i получится в форме двойного ряда вида

$$\left.\begin{aligned} a_i = M_0 &+ \frac{M_1}{6-4m+m^2} + \frac{M_2}{(6-4m+m^2)^2} + \ldots + \\ &+ \frac{N_1}{30-4m+m^2} + \frac{N_2}{(30-4m+m^2)^2} + \ldots + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (14.1)$$

Легко видеть, что каждая из величин $M_0, M_1, \ldots, N_1, N_2, \ldots$ получится в форме двучлена вида

$$Am^h + Bm^{h+1}$$

с рациональными коэффициентами A и B.

Разложив члены ряда (14.1) по степеням m, Хилл получил следующие окончательные формулы [Хилл, 1878]:

$$a_1 = \frac{3}{16}m^2 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{7}{2^2\cdot 3}m^4 + \frac{11}{2^2\cdot 3^2}m^5 - \frac{30\,749}{2^{12}\cdot 3^3}m^6 - \\ - \frac{1\,010\,521}{2^{11}\cdot 3^4\cdot 5}m^7 - \frac{18\,445\,871}{2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2}m^8 - \frac{2\,114\,557\,853}{2^{12}\cdot 3^6\cdot 5^3}m^9 - \ldots,$$

$$a_{-1} = -\frac{19}{16}m^2 - \frac{5}{3}m^3 - \frac{43}{2^2\cdot 3^2}m^4 - \frac{14}{3^3}m^5 - \frac{7381}{2^{10}\cdot 3^4}m^6 + \\ + \frac{3\,574\,153}{2^{11}\cdot 3^5\cdot 5}m^7 + \frac{55\,218\,889}{2^9\cdot 3^6\cdot 5^2}m^8 + \frac{13\,620\,153\,029}{2^{12}\cdot 3^7\cdot 5^3}m^9 + \ldots,$$

$$a_2 = \frac{25}{2^8}m^4 + \frac{803}{2^7\cdot 3\cdot 5}m^5 + \frac{6109}{2^5\cdot 3^2\cdot 5^2}m^6 + \frac{897\,599}{2^8\cdot 3^3\cdot 5^3}m^7 + \\ + \frac{237\,203\,647}{2^{16}\cdot 3^2\cdot 5^4}m^8 - \frac{44\,461\,407\,673}{2^{15}\cdot 3^4\cdot 5^5\cdot 7}m^9 + \ldots,$$

$$a_{-2} = \frac{23}{2^7\cdot 5}m^5 + \frac{299}{2^5\cdot 3\cdot 5^2}m^6 + \frac{56\,339}{2^8\cdot 3^2\cdot 5^3}m^7 + \\ + \frac{79\,400\,351}{2^{16}\cdot 3^2\cdot 5^4}m^8 + \frac{8\,085\,846\,833}{2^{14}\cdot 3^4\cdot 5^5\cdot 7}m^9 + \ldots,$$

$$a_3 = \frac{833}{2^{12}\cdot 3}m^6 + \frac{27\,943}{2^{11}\cdot 5\cdot 7}m^7 + \frac{12\,275\,527}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}m^8 + \\ + \frac{27\,409\,853\,579}{2^{12}\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^3}m^9 + \ldots,$$

$$a_{-3} = \frac{1}{2^8\cdot 3}m^6 + \frac{71}{2^7\cdot 3\cdot 5}m^7 + \frac{46\,951}{2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}m^8 + \frac{14\,086\,643}{2^7\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^3}m^9 + \ldots,$$

$$a_4 = \frac{3537}{2^{16}}m^8 + \frac{111\,809\,667}{2^{17}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2}m^9 + \ldots,$$

$$a_{-4} = \frac{23}{2^{11}\cdot 3}m^8 + \frac{1\,576\,553}{2^{17}\cdot 3^2\cdot 7^2}m^9 + \ldots$$

Вопрос о сходимости этих рядов впервые был рассмотрен А. М. Ляпуновым в 1896 г. Он показал [Ляпунов, 1954], что ряды Хилла сходятся, если $|m|\leqslant 1/7$. Усовершенствование метода Ляпунова позволило Г. А. Мерману [1952] доказать сходимость рядов Хилла для $|m|\leqslant 0{,}18$. Другой метод изучения сходимости этих рядов был разработан в 1925 г. Винтнером, показавшим, что эти ряды сходятся при $|m|\leqslant 1/12$. Развитие идей Винтиера позволило М. С. Петровской дать общий метод для нахождения радиуса сходимости рядов, представляющих периодические решения, зависящие от малого параметра. Применение этого метода обнаружило, что ряды Хилла сходятся при $m\leqslant 0{,}21$ [Петровская, 1958].

Чтобы закончить нахождение коэффициентов периодического решения (12.2), нам остается найти общий множитель a, выделенный в разложениях (12.3). Для этого надо взять одно из неоднородных относительно u и s уравнений. Воспользуемся первым из уравнений (11.2). При $z=0$ это уравнение можно написать так:

$$\left(D^2+2mD+\frac{3}{2}m^2\right)u+\frac{3}{2}m^2 s=\varkappa u\,(us)^{-3/2}.$$

Подставив сюда разложения (12.3), получим

$$\mathrm{a}\sum_k\left[(2k+1)^2+2m(2k+1)+\frac{3}{2}m^2\right]a_k\zeta^{2k+1}+ \\ +\frac{3}{2}m^2\mathrm{a}\sum_k a_k\zeta^{-2k-1}=\varkappa u\,(us)^{-3/2}, \tag{14.2}$$

потому что

$$s=\mathrm{a}\sum_k a_{-k-1}\zeta^{2k+1}=\mathrm{a}\sum_k a_{k-1}\zeta^{-2k+1}=\mathrm{a}\sum_k a_k\zeta^{-2k-1}.$$

При $\zeta=1$ соотношение (14.2) дает

$$\sum_k\left[(2k+1+m)^2+2m^2\right]a_k=\varkappa\mathrm{a}^{-3}\left(\sum_k a_k\right)^{-2}. \tag{14.3}$$

После подстановки найденных значений a_k окончательно получим

$$\varkappa\mathrm{a}^{-3}=1+2m+\frac{3}{2}m^2+\ \ldots \tag{14.4}$$

В теории движения Луны этому соотношению придают другую форму. Так как

$$\varkappa=\frac{k^2m_2}{(n-n')^2};\quad \frac{n}{n-n'}=1+m$$

(где за m_2 в этом случае берется сумма масс Земли и Луны), то

$$\varkappa=k^2m_2(1+m)^2n^{-2}=(1+m)^2a^3, \tag{14.5}$$

где через a обозначена большая полуось лунной орбиты, определяемая соотношением

$$n^2a^3 = k^2m_2.$$

Подстановка (14.5) в соотношение (14.4) позволяет придать ему следующую форму:

$$\mathbf{a} = a\left(1 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{407}{2304}m^4 - \frac{67}{288}m^5 - \frac{45\,293}{41\,472}m^6 - \right.$$
$$\left. - \frac{8761}{6912}m^7 - \frac{4\,967\,441}{7\,962\,624}m^8 + \frac{14\,829\,273}{39\,813\,120}m^9 + \ldots\right). \quad (14.6)$$

Таким образом, форма рассматриваемой нами периодической орбиты зависит только от одного параметра m. Но размеры этой орбиты зависят и от $\varkappa$.

Выведенные в этом параграфе ряды менее удобны для вычисления a_i и $\mathbf{a}$, нежели указанный в предыдущем параграфе способ численного нахождения a_i и вычисление $\mathbf{a}$ при помощи соотношения (14.3). Но доказательство сходимости этих рядов завершает доказательство существования периодических решений рассматриваемого вида. С другой стороны, эти ряды позволяют, по крайней мере для небольших значений m, изучить изменение формы орбиты в зависимости от изменения этого параметра [Хилл, 1878; Пуанкаре, 1892; Шарлье, 1907; Мультон, 1920].

Периодическая орбита Хилла часто называется вариационной орбитой (или вариационной кривой), что связано с той ролью, которую эта орбита играет в теории движения Луны. Приняв эту орбиту за первое приближение, мы тем самым учитываем одно из самых больших возмущений, производимых Солнцем в движении Луны, а именно — вариацию.

§ 15. Периодические решения задачи трех тел

Частные случаи задачи трех тел, открытые Эйлером и Лагранжем, были первым примером периодических решений этой задачи, т. е. таких решений, в которых все величины, определяющие взаимное расположение тел, являются периодическими функциями времени с одним и тем же периодом.

Но эти пять случаев являются элементарными, не открывающими дальнейших перспектив, поскольку в каждом из них все движения происходят по законам Кеплера. Рассмотренная нами в последних параграфах периодическая орбита Хилла была первым случаем принципиально нового типа движения в задаче трех тел, движения несравненно более сложного, нежели движения, встречающиеся в задаче двух тел, но тем не менее вполне известного для всех значений времени, поскольку оно является периодическим.