где через a обозначена большая полуось лунной орбиты, определяемая соотношением

$$n^2a^3 = k^2m_2.$$

Подстановка (14.5) в соотношение (14.4) позволяет придать ему следующую форму:

$$\mathbf{a} = a\left(1 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{407}{2304}m^4 - \frac{67}{288}m^5 - \frac{45\,293}{41\,472}m^6 - \right.$$
$$\left. - \frac{8761}{6912}m^7 - \frac{4\,967\,441}{7\,962\,624}m^8 + \frac{14\,829\,273}{39\,813\,120}m^9 + \ldots\right). \qquad (14.6)$$

Таким образом, форма рассматриваемой нами периодической орбиты зависит только от одного параметра m. Но размеры этой орбиты зависят и от $\varkappa$.

Выведенные в этом параграфе ряды менее удобны для вычисления a_i и $\mathbf{a}$, нежели указанный в предыдущем параграфе способ численного нахождения a_i и вычисление $\mathbf{a}$ при помощи соотношения (14.3). Но доказательство сходимости этих рядов завершает доказательство существования периодических решений рассматриваемого вида. С другой стороны, эти ряды позволяют, по крайней мере для небольших значений m, изучить изменение формы орбиты в зависимости от изменения этого параметра [Хилл, 1878; Пуанкаре, 1892; Шарлье, 1907; Мультон, 1920].

Периодическая орбита Хилла часто называется *вариационной орбитой* (или *вариационной кривой*), что связано с той ролью, которую эта орбита играет в теории движения Луны. Приняв эту орбиту за первое приближение, мы тем самым учитываем одно из самых больших возмущений, производимых Солнцем в движении Луны, а именно — вариацию.

§ 15. Периодические решения задачи трех тел

Частные случаи задачи трех тел, открытые Эйлером и Лагранжем, были первым примером периодических решений этой задачи, т. е. таких решений, в которых все величины, определяющие взаимное расположение тел, являются периодическими функциями времени с одним и тем же периодом.

Но эти пять случаев являются элементарными, не открывающими дальнейших перспектив, поскольку в каждом из них все движения происходят по законам Кеплера. Рассмотренная нами в последних параграфах периодическая орбита Хилла была первым случаем принципиально нового типа движения в задаче трех тел, движения несравненно более сложного, нежели движения, встречающиеся в задаче двух тел, но тем не менее вполне известного для всех значений времени, поскольку оно является периодическим.

Открытый Хиллом случай периодического движения явился отправным пунктом весьма важных исследований Пуанкаре [1892], который создал общие методы для нахождения и изучения уже целых классов периодических, а также некоторых других, близких к ним, решений дифференциальных уравнений.

В основе этих исследований лежит способ нахождения периодических решений, получивший название метода Пуанкаре, или метода малого параметра. Идея этого способа заключается в следующем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n; \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{15.1}$$

правые части которых являются аналитическими функциями независимой переменной t, неизвестных x_s и параметра μ. Допустим, далее, что X_s являются периодическими, с периодом T, функциями t и что уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n; 0), \tag{15.2}$$

получающиеся из (15.1) при $\mu = 0$, имеют периодическое, с тем же периодом T, решение

$$x_s = \varphi_s(t), \tag{15.3}$$

так что

$$\varphi_s(t + T) = \varphi_s(t)$$

при всех значениях t.

Считая $|\mu|$ малой величиной, будем искать решение системы (15.1), определяемое начальными условиями

$$t = 0, \quad x_s = \varphi_s(0) + \beta_s$$

и имеющее тот же период T. Такое решение

$$x_s = \Phi_s(t, \mu, \beta_1, \ldots, \beta_n) \tag{15.4}$$

должно, следовательно, удовлетворять условиям

$$\Phi_s(T, \mu, \beta_1, \ldots, \beta_n) - \Phi_s(0, \mu, \beta_1, \ldots, \beta_n) = 0. \tag{15.5}$$

Пуанкаре показал, что уравнения (15.5) позволяют, по крайней мере в общем случае, найти β_s в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням μ и сходящихся для достаточно малых значений $|\mu|$. Этим доказывается существование такого периодического решения (15.4) уравнений (15.1), в котором x_s являются аналитическими функциями μ и которое при $\mu = 0$ обращается в решение (15.3) системы (15.2).

По отношению к этому периодическому решению система (15.2) носит название порождающей, а решение (15.3) — порождающего решения.

Пуанкаре подробно исследовал условия, при которых периодическому решению порождающей системы соответствует периодическое решение основной системы. Он указал случаи, когда таких решений может быть несколько или даже бесчисленное множество. В дальнейшем теория периодических решений получила широкое развитие, как один из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений [Малкин, 1956].

Вернемся к задаче трех тел. Рассмотрим движение двух планет с массами m и m' вокруг Солнца, масса которого принята за единицу. Положив

$$m=\mu d, \quad m'=\mu d', \tag{15.6}$$

где d и d' надлежащим образом выбранные положительные числа, мы будем иметь в дифференциальных уравнениях движения параметр μ, который можно считать малым (порядка планетных масс).

При $\mu=0$ эти уравнения будут состоять из двух независимых систем, каждая из которых даст кеплерово движение одной из планет. Рассмотрим сначала тот случай, когда эти невозмущенные движения планет происходят по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, и обозначим через n и n' средние движения планет $(n>n')$.

За начало счета времени t примем момент одного из соединений двух планет, так что при $t=0$ их долготы будут равны. Через промежуток времени

$$T=\frac{2\pi}{n-n'}$$

долготы изменятся соответственно на

$$\frac{2\pi n}{n-n'} \quad \text{и} \quad \frac{2\pi n'}{n-n'},$$

вследствие чего разность долгот станет равной 2π. Таким образом, снова будет иметь место соединение, но вся система окажется повернутой на угол $n'T$ по сравнению со своим первоначальным положением. Поэтому если движение отнести к гелиоцентрической системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью n', то движение системы при $\mu=0$ будет периодическим с периодом T.

Пуанкаре доказал, что при достаточно малых значениях $|\mu|$ также будут существовать периодические решения с тем же самым периодом T. Он назвал их периодическими решениями первого типа (de la première sorte) задачи трех тел.

Когда одна из величин d и d' в равенствах (15.6) бесконечно мала по сравнению с другой, мы имеем плоскую ограниченную задачу. Вычисление орбит первого типа в этом случае значительно упрощается. Оно еще более упрощается в том предельном случае, который был изучен Хиллом (§ 10). Периодическая орбита Хилла может рассматриваться, таким образом, как один из простейших примеров периодических орбит первого типа.

Все случаи периодического движения, получающегося из сочетания тех невозмущенных движений двух планет, которые имеют место при $\mu=0$, можно разделить на два класса. К первому отнесем те, в которых по истечении периода T вся система оказывается повернутой на некоторый угол, ко второму — те, в которых подобное вращение не имеет места, так что по истечении времени T не только взаимные расстояния, но и долготы планет принимают прежние значения.

Пример порождающего решения, относящегося к первому классу, мы только что имели. Обратимся теперь к случаям, когда берется порождающее решение второго класса.

Предположим, что движения планет происходят по неподвижным эллипсам, лежащим в одной плоскости.

Движение всей системы будет периодическим, если средние движения планет соизмернмы, так что

$$\frac{n}{n'}=\frac{p}{q}, \tag{15.7}$$

где p и q целые, взаимно простые числа.

В самом деле, по истечении времени

$$T=\frac{2\pi p}{n}=\frac{2\pi q}{n'},$$

за которое одна планета совершит p оборотов, а другая — q оборотов, система вернется в свое первоначальное положение.

Чтобы доказать, что это периодическое решение, имеющее место при $\mu=0$, является порождающим для решения с тем же периодом T, существующим при значениях μ, отличных от нуля, пришлось на невозмущенные орбиты планет наложить, помимо (15.7), еще следующие дополнительные условия:

1° Долготы перигелиев π и π' должны удовлетворять одному из равенств:

$$\pi-\pi'=0, \quad \pi-\pi'=180°. \tag{15.8}$$

2° Средние аномалии эпохи M_0 и M_0' должны быть связаны соотношением

$$qM_0-pM_0'=k\cdot 180°,$$

где k — целое число.

3° Эксцентриситеты e и e' должны удовлетворять некоторому уравнению вида

$$f(e,\ e',\ m,\ m',\ p,\ q)=0. \tag{15.9}$$

Периодические решения, существующие при μ, не равном нулю, когда все эти условия выполняются, носят название периодических решений второго типа.

В частном случае, когда $m=0$, движения, соответствующие решениям второго типа, отличаются от невозмущенного движения лишь наличием векового члена в средней долготе, иначе говоря, изменением среднего движения, вычисленного по формуле

$$n=ka^{-3/2},$$

на некоторую постоянную величину.

Этот частный случай был подробно изучен в 1902 г. Хиллом [Хилл, 1907], исследовавшим уравнение (15.9) при различных значениях p и q. Фактическое построение периодических решений было выполнено Хиллом аналитическими методами для малых значений эксцентриситетов и численным интегрированием уравнений для больших значений.

Периодическими решениями третьего типа Пуанкаре назвал те, которые порождаются такими невозмущенными эллиптическими движениями, у которых n и n' также удовлетворяют условию (15.7), но которые происходят в различных плоскостях. Пуанкаре показал, что при подчинении невозмущенных движений надлежащим дополнительным условиям и в этом случае возможны периодические решения с тем же периодом, как у порождающего решения. Периодические решения третьего типа были подробно изучены Цейпелем [1904].

Существенное дополнение к исследованиям Пуанкаре было сделано Шварцшильдом [1898; 1903]. Он нашел новые периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел, отличающиеся от периодических решений второго типа тем, что их периоды не совпадают с периодом T порождающего решения, а равны $T+\Delta T$, где ΔT — аналитическая функция μ, обращающаяся в нуль при $\mu=0$. Таким образом, в периодических решениях Шварцшильда линия апсид оскулирующего эллипса имеет вековое движение, тогда как в решениях Пуанкаре она может отклоняться от линии апсид возмущающей планеты лишь на величины порядка возмущающей массы m'. Это делает решения Шварцшильда более пригодными для изучения движения малых планет, нежели решения Пуанкаре.

Обстоятельное изложение теорий Пуанкаре и Шварцшильда можно найти, помимо уже указанных работ, в монографиях Шарлье [1907], Хаппеля [1941] и Зигеля [1956].

Решения Шварцшильда были обобщены на случай пространственной ограниченной задачи трех тел [Батраков, 1955a] и на случай общей задачи трех тел [Батраков, 1955b]. Найденные Ю. В. Батраковым решения, допускающие вековое движение линии узлов, заключают как частные случаи периодические решения Пуанкаре третьего типа.

Новый класс периодических решений для ограниченной задачи трех тел и для задачи Хилла был найден Г. А. Мерманом [1952]. Решения Мермана отличаются от рассмотренных выбором порождающего решения и практически заключают четыре произвольных параметра из шести входящих в общее решение. За такие параметры могут быть приняты начальные значения следующих элементов орбиты планетоида: большой полуоси, эксцентриситета, наклона плоскости орбиты, средней аномалии эпохи.

Вопрос о существовании предельно периодических решений плоской ограниченной задачи трех тел был окончательно выяснен Г. А. Мерманом. Его монография [Мерман, 1961] заключает подробный разбор всей истории этого вопроса *).

§ 16. Применения периодических решений

Первое периодическое решение задачи трех тел, не приводящееся к комбинации кеплеровых движений, было найдено в процессе решения конкретной астрономической задачи. Этим решением была, как мы видели, вариационная орбита Хилла, так хорошо воспроизводящая одно из наибольших возмущений в движении Луны. Именно поэтому использование вариационной орбиты в качестве промежуточной позволило создать столь совершенную теорию движения Луны.

Много работ было посвящено попыткам использовать аналогичным образом периодические решения Пуанкаре и Шварцшильда для изучения движения тех малых планет, средние

*) За последние годы в теории квазипериодических решений (то есть представимых почти периодическими функциями с конечным числом частот) уравнений небесной механики был достигнут значительный прогресс, основанный на использовании замеченной Колмогоровым [Колмогоров, 1954] быстрой сходимости процесса последовательных канонических преобразований. В работе Арнольда [1963] доказано существование квазипериодических решений в общей задаче n тел для малых значений эксцентриситетов и наклонов; эти решения соответствуют эллиптическим решениям невозмущенной задачи.

Вероятность того, что наугад взятым начальным значениям полуосей, наклонов и эксцентриситетов отвечают квазипериодические решения Арнольда, стремится к единице, если возмущение стремится к нулю.

Оказалось возможным также доказать существование квазипериодических движений с неполным набором частот (меньшим числа степеней свободы) и, в частности, квазипериодических движений первого типа, для которых порождающими являются круговые движения с несоизмеримыми периодами ([Мельников, 1965], [Jeffrys W. H., Moser I., 1966], [Красинский, 1968a]).

В работе [Красинского 1968b] разработан метод, дающий возможность изучать окрестность квазипериодических решений указанных выше типов и, в качестве следствия, показано, что в такой окрестности существует бесконечное множество других квазипериодических решений. (*Прим. ред.*)