нии узлов, заключают как частные случаи периодические решения Пуанкаре третьего типа.

Новый класс периодических решений для ограниченной задачи трех тел и для задачи Хилла был найден Г. А. Мерманом [1952]. Решения Мермана отличаются от рассмотренных выбором порождающего решения и практически заключают четыре произвольных параметра из шести входящих в общее решение. За такие параметры могут быть приняты начальные значения следующих элементов орбиты планетоида: большой полуоси, эксцентриситета, наклона плоскости орбиты, средней аномалии эпохи.

Вопрос о существовании предельно периодических решений плоской ограниченной задачи трех тел был окончательно выяснен Г. А. Мерманом. Его монография [Мерман, 1961] заключает подробный разбор всей истории этого вопроса*).

## § 16. Применения периодических решений

Первое периодическое решение задачи трех тел, не приводящееся к комбинации кеплеровых движений, было найдено в процессе решения конкретной астрономической задачи. Этим решением была, как мы видели, вариационная орбита Хилла, так хорошо воспроизводящая одно из наибольших возмущений в движении Луны. Именно поэтому использование вариационной орбиты в качестве промежуточной позволило создать столь совершенную теорию движения Луны.

Много работ было посвящено попыткам использовать аналогичным образом периодические решения Пуанкаре и Шварцшильда для изучения движения тех малых планет, средние

---

*) За последние годы в теории квазипериодических решений (то есть представимых почти периодическими функциями с конечным числом частот) уравнений небесной механики был достигнут значительный прогресс, основанный на использовании замеченной Колмогоровым [Колмогоров, 1954] быстрой сходимости процесса последовательных канонических преобразований. В работе Арнольда [1963] доказано существование квазипериодических решений в общей задаче $n$ тел для малых значений эксцентриситетов и наклонов; эти решения соответствуют эллиптическим решениям невозмущенной задачи.

Вероятность того, что наугад взятым начальным значениям полуосей, наклонов и эксцентриситетов отвечают квазипериодические решения Арнольда, стремится к единице, если возмущение стремится к нулю.

Оказалось возможным также доказать существование квазипериодических движений с неполным набором частот (меньшим числа степеней свободы) и, в частности, квазипериодических движений первого типа, для которых порождающими являются круговые движения с несоизмеримыми периодами ([Мельников, 1965], [Jeffrys W. H., Moser I., 1966], [Красинский, 1968a]).

В работе [Красинского 1968b] разработан метод, дающий возможность изучать окрестность квазипериодических решений указанных выше типов и, в качестве следствия, показано, что в такой окрестности существует бесконечное множество других квазипериодических решений. (*Прим. ред.*)

движения которых близки к соизмеримости со средним движением Юпитера. Такие планеты испытывают весьма значительные возмущения, вычисление которых обычными методами сопряжено с исключительными трудностями. Использование соответствующих периодических решений открыло здесь новые возможности.

Вероятность того, что малая планета движется в точности по периодической орбите, равна, конечно, нулю. Но может случиться, что начальные условия движения планеты достаточно мало отличаются от тех, которые соответствуют периодическому решению.

В этом случае периодическое решение может быть принято за промежуточную орбиту, иначе говоря, за первое приближение. Для получения решения, представляющего движение планеты более точно, Пуанкаре указал следующий путь.

Пусть движение планеты определяется уравнениями

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_s) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{16.1}$$

а равенства

$$x_s = \varphi_s(t) \tag{16.2}$$

представляют рассматриваемое периодическое решение.

В таком случае движение планеты может быть представлено равенствами

$$x_s = \varphi_s(t) + \xi_s, \tag{16.3}$$

где $\xi_s$ — малые величины.

Подставив (16.2) в (16.1) и ограничившись первыми степенями $\xi_s$, получим

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial X_s}{\partial x_k} \xi_k. \tag{16.4}$$

Эти соотношения, дающие приближенные значения $\xi_s$, Пуанкаре назвал *уравнениями в вариациях*. В рассматриваемом нами случае, когда решение (16.2) периодическое, уравнения в вариациях представляют собой систему линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Если точность, даваемая уравнениями (16.4), недостаточна, то указанный прием можно повторить, приняв (16.3) за исходное решение. Другой путь повышения точности заключается в присоединении к правым частям уравнений (16.4) свободных членов, приближенно учитывающих влияние членов высших степеней.

Изложенный метод позволил построить аналитические теории, приближенно представляющие движение малых планет Гильды (соизмеримость 2 : 3) и Гекубы (соизмеримость 1 : 2) на значительных интервалах времени [Чеботарев, 1951; Пиус, 1961].

Исходные периодические орбиты (типа Шварцшильда) были получены при помощи численного интегрирования уравнений движения. Таким путем гораздо легче найти периодические решения с нужной точностью, нежели аналитическими методами, развитыми Пуанкаре и Шварцшильдом. Для интервалов времени, не превышающих нескольких десятков лет, оказалось возможным без существенного ущерба для точности заменить в уравнениях в вариациях периодические коэффициенты их средними значениями. В этом случае нахождение вариаций $\xi_s$, определяемых системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами, выполняется совсем просто.

В качестве основы для построения точных теорий движения планет периодические решения задачи трех тел использованы в работе В. А. Брумберга [1966].

## § 17. Финальные движения в задаче трех тел

Классификация движений, имеющих место в задаче трех тел, представляет весьма сложную проблему, изучение которой еще только едва начинается. Некоторая законченность была достигнута лишь в отношении так называемых финальных движений, т. е. тех предельных видов, к которым движения стремятся при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

Работы Шази (J. Chazy), создавшего в 1922—1932 гг. основы теории финальных движений, показали, что каждое такое движение (продолжающееся до бесконечности, иначе говоря, не заканчивающееся тройным соударением) необходимо принадлежит к одному из следующих семи видов.

I. *Движения гиперболические,* в которых все три расстояния между телами становятся бесконечно большими величинами первого порядка относительно времени.

В этом случае каждая из шести координат, определяющих относительное положение трех тел, может быть представлена (для достаточно больших значений $|t|$) в форме

$$ct + c' \ln t + c_0 + P\left(\frac{1}{t}, \frac{\ln t}{t}\right), \tag{17.1}$$

где $c$, $c'$, $c_0$ — постоянные величины, а через $P(x, y)$ обозначена функция, голоморфная в точке $(0, 0)$.

II. *Движения гиперболо-параболические,* в которых два из расстояний между телами суть бесконечно большие величины первого порядка, а третье расстояние есть величина порядка 2/3.

В этом случае координаты одного из тел относительно одного из двух других представляются рядами вида

$$c_1 t^{1/3} + c_2 t^{2/3} + t^{2/3} P\left(\frac{1}{t^{1/3}}, \frac{\ln t}{t}\right), \tag{17.2}$$